Estadística bayesiana

Tarea 2

Fecha de entrega: 7 de abril

1. Sea $X \sim \text{Bin}(n, \theta)$ con n conocido y una distribución inicial $q(\theta) = \text{Be}(\sqrt{n}/2, \sqrt{n}/2)$.
   (a) ¿Cuál es el estimador de Bayes, d_q bajo una pérdida cuadrática?
   (b) ¿Cuál es el riesgo de Bayes?
   (c) ¿Cómo se compara este riesgo de Bayes con el correspondiente al estimador $d_0(x) = x/n$ cuando $n = 10, 50$ y 100?

2. Sea $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ con distribución inicial $q(\theta) = \mathcal{N}(0, n)$.
   (a) Encuentra el riesgo bayesiano bajo una pérdida cuadrática. ¿Cómo se comporta dicho riesgo cuando n crece?
   (b) Sea $n = 1$. Demuestra que bajo la función de pérdida,
   $$l(\theta, d) = \exp\left(\frac{3\theta^2}{4}\right)(\theta - d)^2,$$
   el estimador bayesiano es $d_q(x) = 2x$.
   (c) ¿Cuál es el riesgo bayesiano para este último estimador y cómo se compara con el del inciso (a)?

3. Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una muestra aleatoria con distribución Pareto(α, β), cuya función de densidad está dada para $x > \beta$ por
   $$f(x) = \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}.$$
   Supóngase que se observa $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ y que α es conocida pero β no.
   (a) Muestre que la distribución gamma es una familia conjugada para el parámetro β.
   (b) Encuentre el estimador bayesiano bajo una función de pérdida cuadrática.

4. ¿Cuál es el estimador de Bayes correspondiente a una función de pérdida $l(\theta, d) = |d - \theta|$.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ intercambiables tales que $X_i|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$.

   (a) Utilizando la distribución impropia $f(\theta) \propto \theta^{-1}(1-\theta)^{-1}$ encuentre la distribución posterior de $\theta|\mathbf{x}$.

   (b) Para dicha distribución posterior, obtener la aproximación de Laplace.

   (c) Muestra que la distribución inicial $f(\theta)$ es equivalente a una distribución uniforme para

$$\beta \;=\; \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right).$$

   (d) Para dicha transformación, encuentra la distribución posterior y la aproximación de Laplace correspondiente.

   (e) ¿Para qué parametrización tiene más sentido utilizar la aproximación de Laplace?

6. Considera la integral

$$I \;=\; \int_0^{10} \exp(-2|x-5|)dx.$$

   (a) Suponga que $X \sim \text{Unif}(0, 10)$. Mostrar que la integral se puede ver como una esperanza con respecto a dicha distribución. De esta forma, utilizando el lenguaje de programación de tu preferencia, derivar una aproximación a I utilizando integración de Monte Carlo.

   (b) Explica como se puede estimar I utilizando el método de muestreo por importancia con distribución $g = \mathcal{N}(5, 1)$. Detallar el algoritmo e implementarlo.

   (c) ¿Qué método prefieres?

7. Sea $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

   (a) Explica cómo utilizar la integración de Monte Carlo para encontrar $\mathbb{P}(X > a)$ para $a \in \mathbb{R}$.

   (b) ¿Cuáles son las dificultades para valores grandes de a?

   (c) Supóngase que se desea estimar dicha probabilidad pero utilizando el método de muestreo por importancia utilizando como distribución instrumental $g = \mathcal{N}(\mu, 1)$. Considerando los casos $a = 3$ y $\mu = 4$ y $a = 4.5$ y $\mu = 4.5$, comente las ventajas de este enfoque comparado con simular directamente de $f = \mathcal{N}(0, 1)$.

   (d) Explica cómo encontrar $\mathbb{P}(X > 4.5)$ utilizando el muestro por importancia con distribución instrumental dada por una exponencial de parámetro $\lambda = 1$ truncada en 4.5 cuya densidad está dada por

$$g(x) \;=\; \exp(-(x-4.5))\mathbb{I}(x)_{(4.5,\infty)}$$

8. Demuestra que para el muestreo por importancia, se tiene que en efecto

$$g^*(x) \;=\; \frac{|h(x)|f(x)}{\int |h(t)|f(t)dt},$$

minimiza la varianza del estimador

$$\hat{\mu} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)w(x_i).$$

9. Sea $X|\theta \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ con distribución inicial $q(\theta) = \mathcal{C}(0, 1)$.

   (a) Mediante el uso de métodos de Monte Carlo encuentra $\mathbb{E}(\theta|x)$ y $\mathsf{Var}(\theta|x)$. Realiza tus aproximaciones para $m = 10, 100, 1000, 10000$ y 100000 simulaciones.

   (b) ¿Cómo se comparan los estimadores del inciso anterior con los estimadores correspondientes a $q(\theta) = \mathcal{N}(0, 1)$?

10. Considera la distribución de Kumaraswamy definida en el intervalo $(0, 1)$ y con densidad

$$f(x) \;=\; abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1}.$$

   (a) Obtén la cdf de dicha distribución e implementa un algoritmo para simular una muestra de tamaño 10,000.

   (b) Utilizando el algoritmo de aceptación y rechazo con distribución uniforme como distribución instrumental, simula una muestra de tamaño 10,000. ¿Cuántas variables tuviste que generar hasta tener las 10,000 deseadas?

   (c) Utilizando el muestreo por importancia con distribución uniforme como la distribución instrumental, genera una muestra de tamaño 10,000.

   (d) Obtener de forma analítica la esperanza de la distribución. Y comparar para diferentes tamaños de muestra el estimador de Monte Carlo de los tres métodos anteriores.