Estadística bayesiana

Tarea 3

Fecha de entrega: 5 de mayo

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una colección intercambiable tal que $X_i \mid \theta \sim$ Inv-gamma (α, β) con α conocida y se asume que $\theta \sim \text{Gamma}(\alpha_0, \beta_0)$ con α_0 y β_0 conocida.

   (a) ¿Cuál es la distribución posterior de θ?

   (b) Se desea usar un algoritmo de Metropolis - Hastings para simular de la distribución posterior utilizando una distribución normal con media θ y varianza σ como distribución instrumental. Describir el algoritmo, obteniendo la probabilidad de aceptación de forma simplificada e implementa el algoritmo para generar una muestra de tamaño 5000 para los valores $\alpha = 1$, $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\sigma = .25$, $\theta^{(0)} = 1$ y los datos *T3ejercicio1.txt*. Con la cadena resultante proporciona una estimación de la media posterior.

2. Suponer que $X \mid \theta \sim \text{N}(\theta, \sigma^2)$ y $Y \mid \theta, \delta \text{N}(\theta - \delta, \sigma^2)$ donde σ^2 es una constante conocida y X, Y son condicionalmente independientes dado θ, δ. Considerando la distribución impropia $f(\theta, \delta) \propto 1$ y $x = 2$, $y = 1$ y $\sigma^2 = 1$:

   (a) Describe e implementa un algoritmo Gibbs para obtener una muestra de la distribución posterior, graficando las cadenas resultantes y proporcionando estimaciones de las medias posteriores y de la matriz de covarianzas posterior.

   (b) Suponer en su lugar que se desea utilizar un algoritmo Metropolis - Hastings con distribución instrumental normal bivariada con vector de medias $\mu^{(t-1)} = (\theta^{(t-1)}, \delta^{(t-1)})$ y matriz de covarianzas

   $$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_q^2 & 0 \\ 0 & \sigma_q^2 \end{pmatrix}$$

   ¿Cómo se comportan las cadenas y las estimaciones de la media y la matriz de covarianza para diferentes valores de σ_q^2?

3. Sea $X \mid \theta \sim \text{N}(\theta, 1)$ con $\theta \sim \text{Cauchy}(0, 1)$. Considerando como función objetivo la distribución posterior, construye una cadena de Markov vía el método de Metropolis - Hastings con distribución instrumental $q(\cdot \mid x_t) = \text{N}(x_t, \sigma^2)$.

(a) Simula 9 distintas trayectorias $\{X_t\}_{t=1}^{M}$ para $M = 1000$ y con distintos puntos iniciales $X_0 = -10, 10, -5, 5, -2, 2, -1, 1, 0$.

(b) Selecciona una trayectoria que parezca estacionaria (de ser necesario incrementa el tamaño de M). Para esta trayectoria reporta una estimación de la media y varianza posterior usando estimación por Monte Carlo e ignorando un periodo de calentamiento adecuado (e.g. si $M = 10000$ toma las últimas $m = 10, 100, 1000, 5000$)

4. Para la distribución beta (α, β) deriva e implementa un algoritmo slice para obtener una muestra de esta distribución. Para esto deberás encontrar de forma analítica o numérica la solución a

$$f(x) - u = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha, \beta)} - u.$$

Así se podrá derivar la región de simulación $A^{(t)} = \{x : f(x) \geq u^{(t}\}$. Genera una muestra de tamaño $M = 1000$ para $\alpha = 6$ y $\beta = 2$, e ilustra los resultados graficando la densidad y los puntos debajo de la curva.

5. Considera la siguiente función definida en $| x | \leq \pi/2$ y $| y | \leq \pi/2$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \exp(\sin(50x)) + \sin(60\exp(y)) + \sin(70\sin(x)) + \sin(\sin(80y)) \\ &\quad - \sin(10(x+y)) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

(a) Grafica la función utilizando el software de tu elección.

(b) A partir de un simulated annealing ¿cuál es el valor mínimo que puedes encontrar para $f(x, y)$ y en qué punto se localiza?

6. Considera que se desea obtener una muestra de la densidad

$$f(x) = 0.4 \cdot \mathrm{N}(-1, 0.2^2) + 0.6 \cdot \mathrm{N}(2, 0.3^2).$$

(a) Grafica la densidad y comenta en su forma.

(b) Considerando una caminata aleatoria con $\epsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2)$ y con punto inicial alguna de las medias de la mezcla, construye una cadena de tamaño $10,000$ para $\sigma = 0.4$. ¿Qué puedes apreciar del comportamiento de la cadena?

(c) ¿Qué puedes comentar si ahora se considera $\sigma = 1.2$?

7. Suponer que $y \sim$ bin (n, p) y existe el interés de estimar los log - momios, i.e.

$$\theta = \log\left(\frac{p}{1-p}\right),$$

donde se asume que $\theta \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) ¿Cuál es la distribución posterior de $\theta \mid y$?

(b) Asumiendo que una moneda se tira 5 veces y salen 5 éxitos. Deriva e implementa un algoritmo de Metropolis - Hastings vía una caminata aleatoria para simular de la distribución posterior. Utiliza la cadena resultante para aproximar la media posterior, la varianza posterior y la probabilidad de que θ sea positiva.

8. Implementa un algoritmo de Metropolis para simular de una distribución $\mathrm{N}(0,1)$ utilizando como distribución instrumental $q(\cdot \mid x) = \mathrm{Unif}(-x-\delta, -x+\delta)$. ¿Qué puedes apreciar sobre la correlación cuando δ varía?

9. Suponer que 197 animales se categorizan en 4 clases con frecuencias $125, 18, 20, 34$. Asumir que las probabilidades de clase están dadas por

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\theta}{4}, \frac{1}{4}(1-\theta), \frac{1}{4}(1-\theta), \frac{\theta}{4}\right),$$

donde θ es un parámetro desconocido en el intervalo $(0,1)$.

(a) Si se considera que a priori $\theta \sim \mathrm{Unif}(0,1)$. ¿Cuál es la distribución posterior de θ dados los datos?

(b) Considera ahora la transformación $\eta = \log(\theta/1-\theta)$. ¿Cuál es la distribución posterior de η?

(c) Deriva e implementa una caminata aleatoria para simular de la distribución posterior de η. De tus simulaciones obtén una estimación para la media posterior así como un intervalo de probabilidad al 95% para η.

10. Considera el modelo autoexponencial dado por

$$f(x_1, x_2, x_3) \quad \propto \quad \exp\{-(x_1 + x_2 + x_3 + \theta_{12}x_1x_2 + \theta_{13}x_1x_3 + \theta_{23}x_2x_3)\},$$

donde $\theta_{12} = 1$, $\theta_{13} = 1.5$ y $\theta_{23} = 3$. Diseña e implementa un algoritmo MCMC para obtener una muestra de esta distribución y aproximar el vector de medias y la matriz de varianza y covarianza.