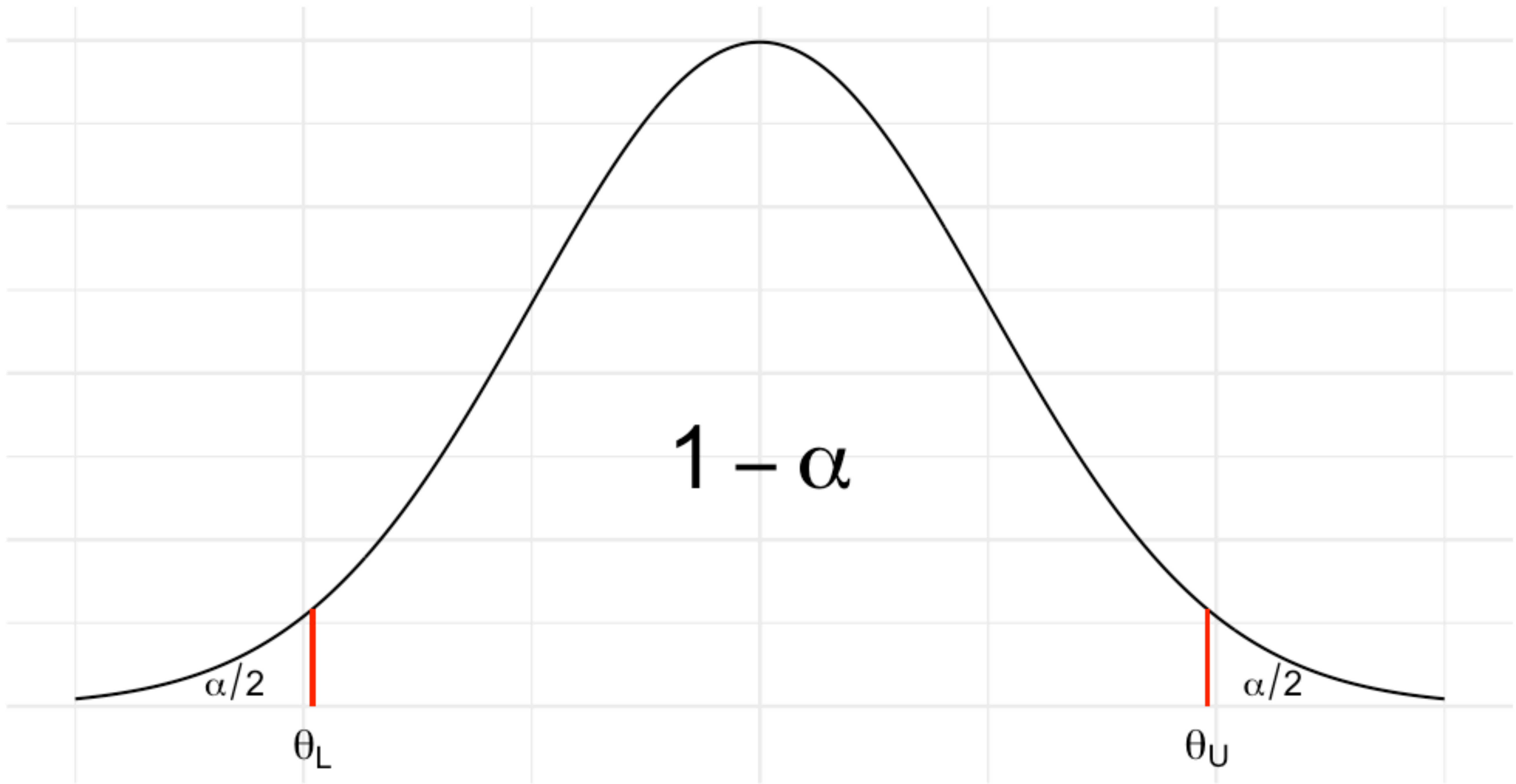
Estimación por intervalos

José Antonio Perusquía Cortés

Inferencia Estadística Semestre 2026-I

Objetivo

- Encontrar un rango de valores que tenga la posibilidad de contener el valor real con un **nivel de confianza** $(1 - \alpha) \times 100\,\%$
- El valor de $\alpha \in [0,1]$ se le conoce como **nivel de significancia** (e.g. $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$)



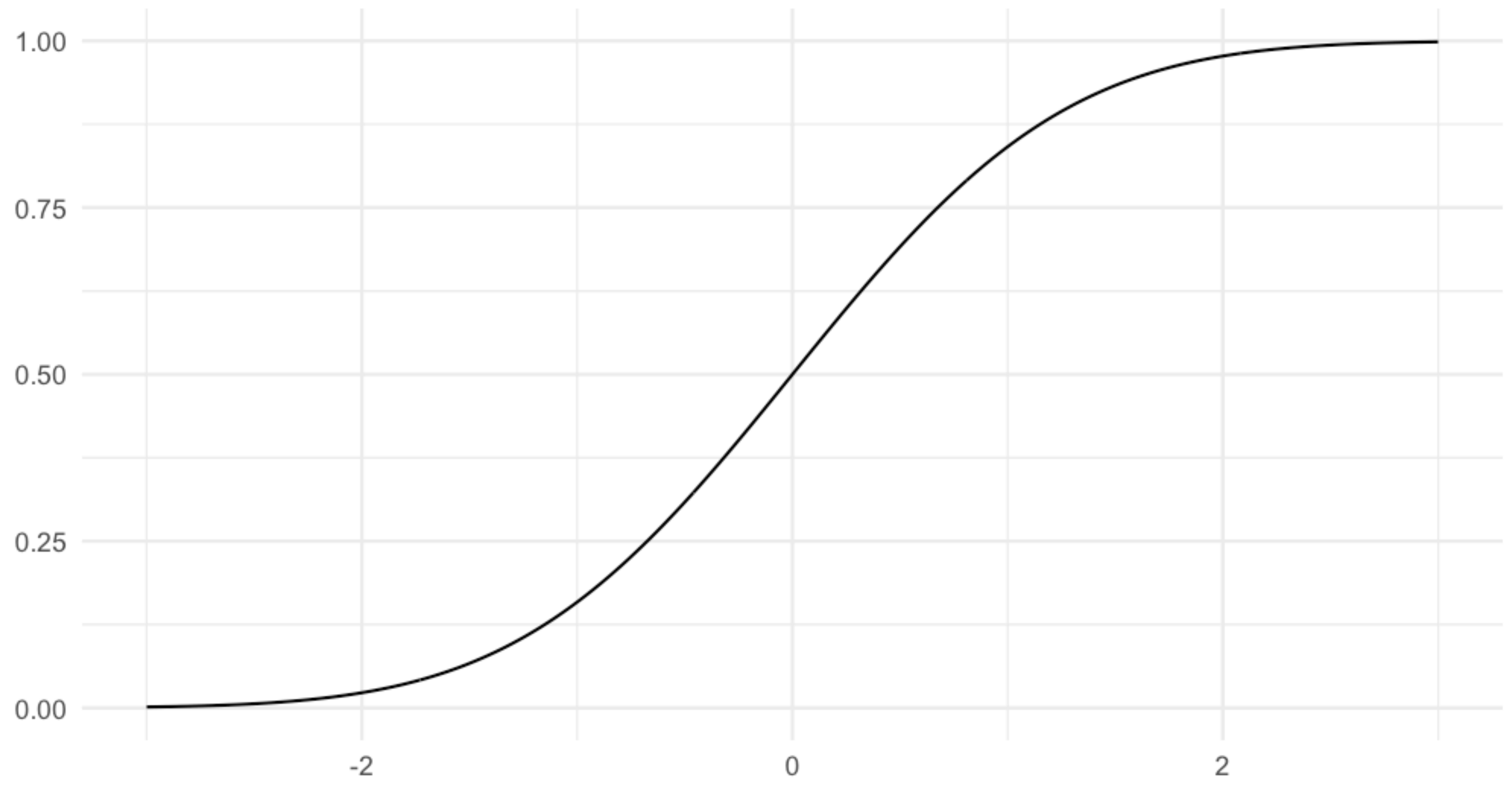
Intervalos de confianza (enfoque clásico)

Recordatorio

- Si F es una función de distribución continua y estrictamente monótona entonces la **función cuantil** se define como su inversa

$$Q(p) = F^{-1}(p)$$

- Proporciona el valor x para el cual se cumple $\mathbb{P}(X \leq x) = p$

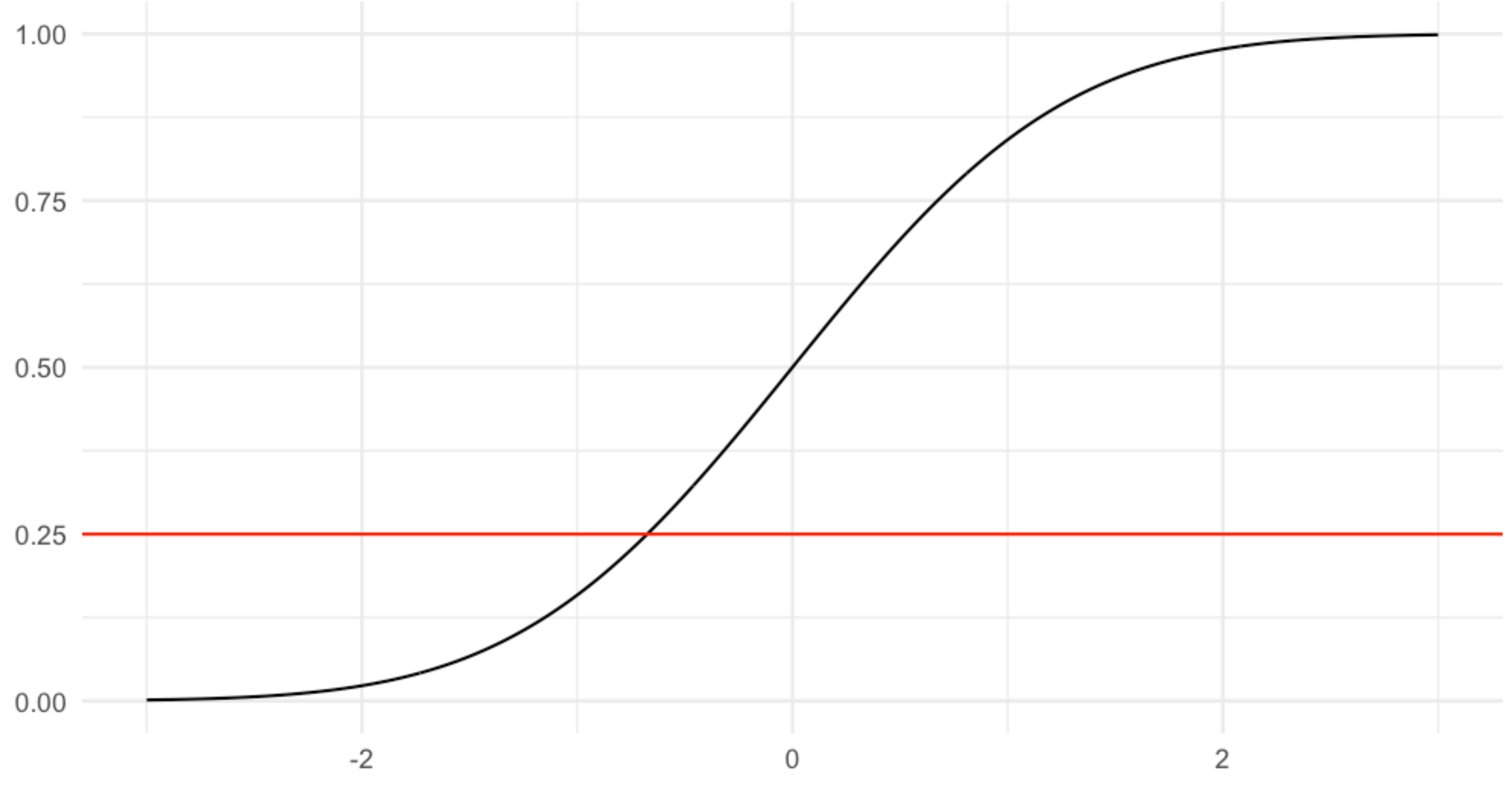


Recordatorio

- Si F es una función de distribución continua y estrictamente monótona entonces la **función cuantil** se define como su inversa

$$Q(p) = F^{-1}(p)$$

- Proporciona el valor x para el cual se cumple $\mathbb{P}(X \leq x) = p$

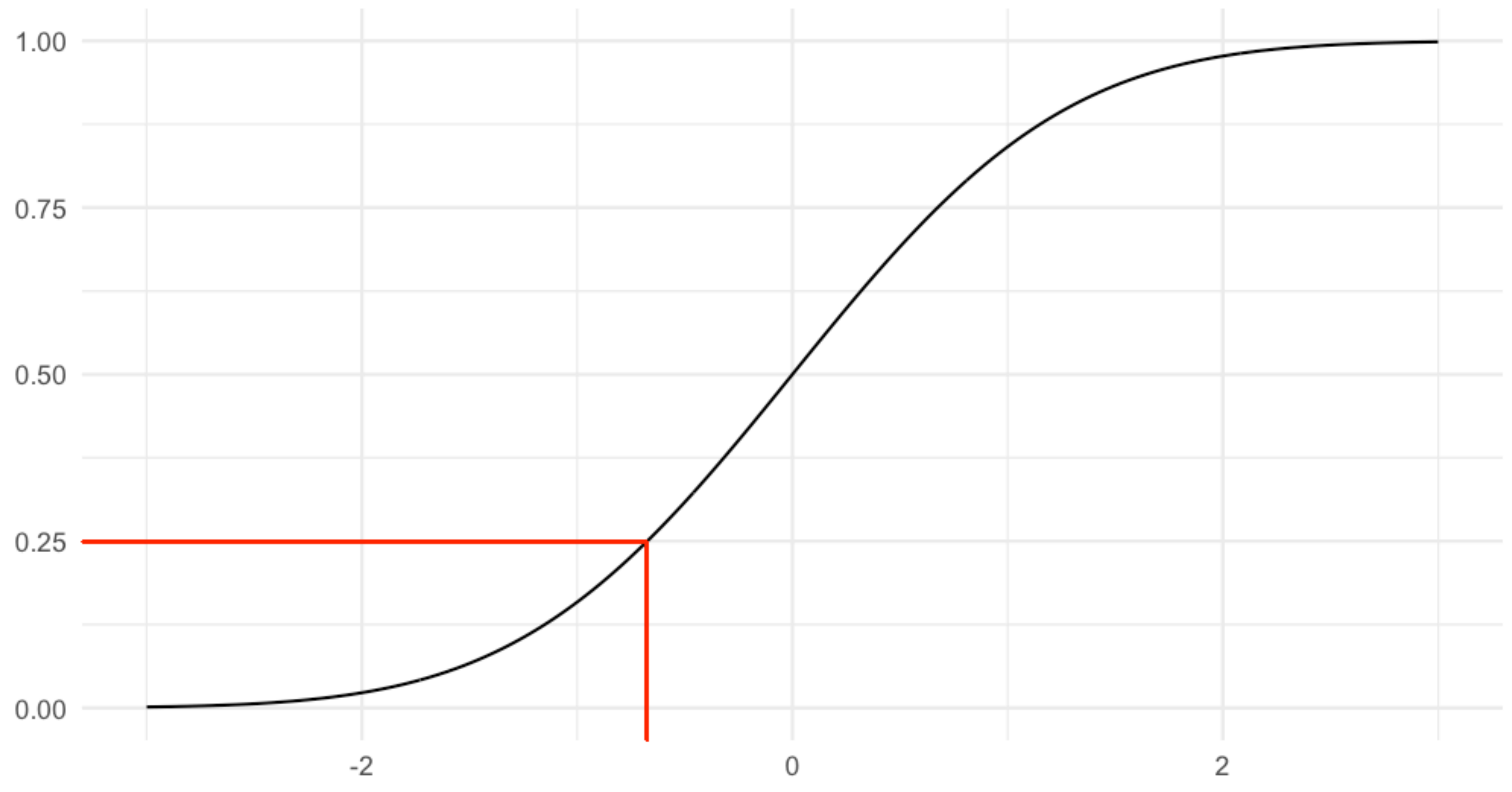


Recordatorio

- Si F es una función de distribución continua y estrictamente monótona entonces la **función cuantil** se define como su inversa

$$Q(p) = F^{-1}(p)$$

- Proporciona el valor x para el cual se cumple $\mathbb{P}(X \leq x) = p$



Recordatorio

- Para distribuciones simétricas se cumple que $Q(p) = -Q(1-p)$, e.g. para $\mathcal{N}(0,1)$

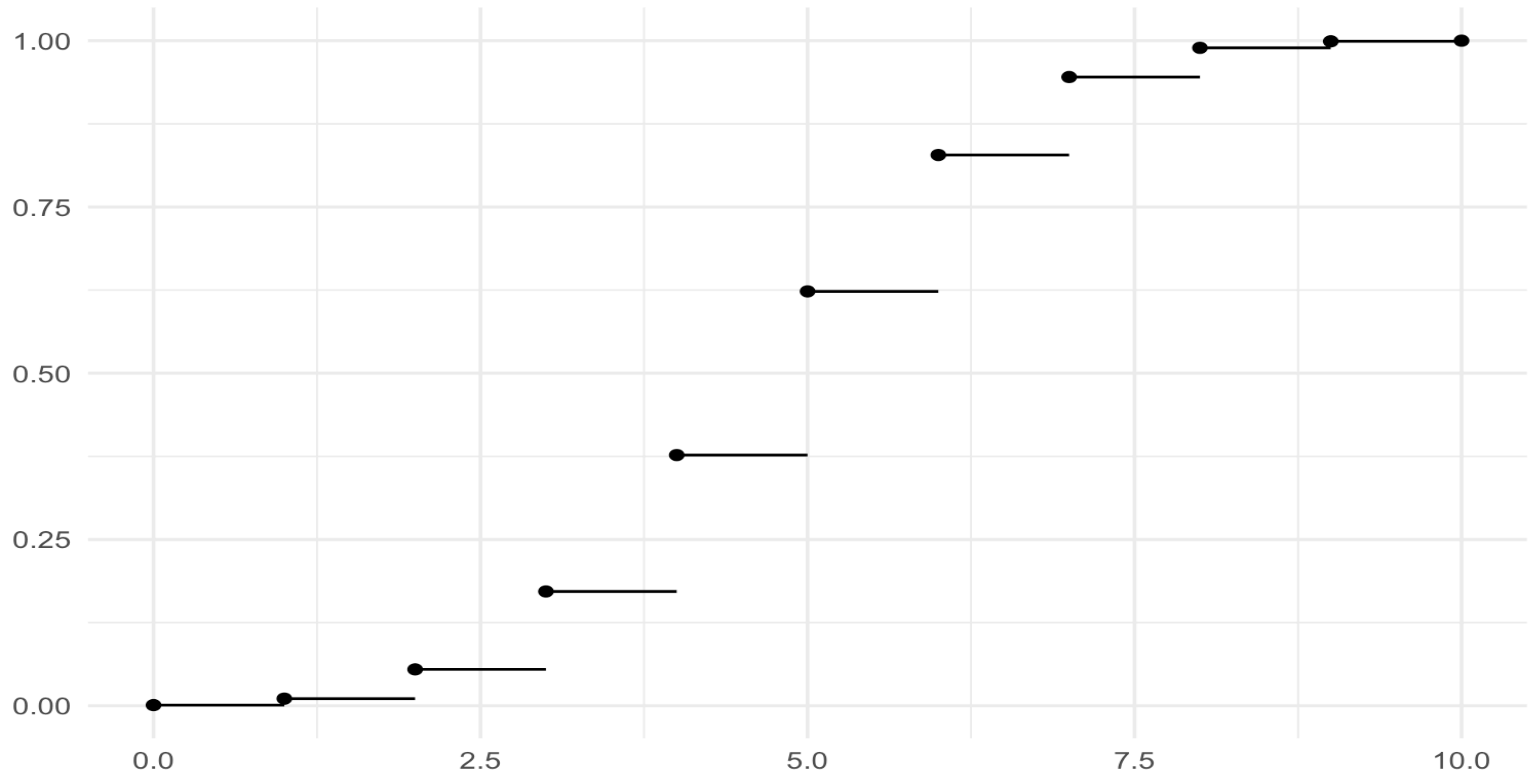
p	$Q(p)$	$Q(1-p)$
0.995	2.575829	-2.575829
0.975	1.959964	-1.959964
0.95	1.644854	-1.644854

- En la práctica no siempre se tendrán distribuciones simétricas

Recordatorio

- Si X es una variable aleatoria discreta se necesita definir la inversa generalizada

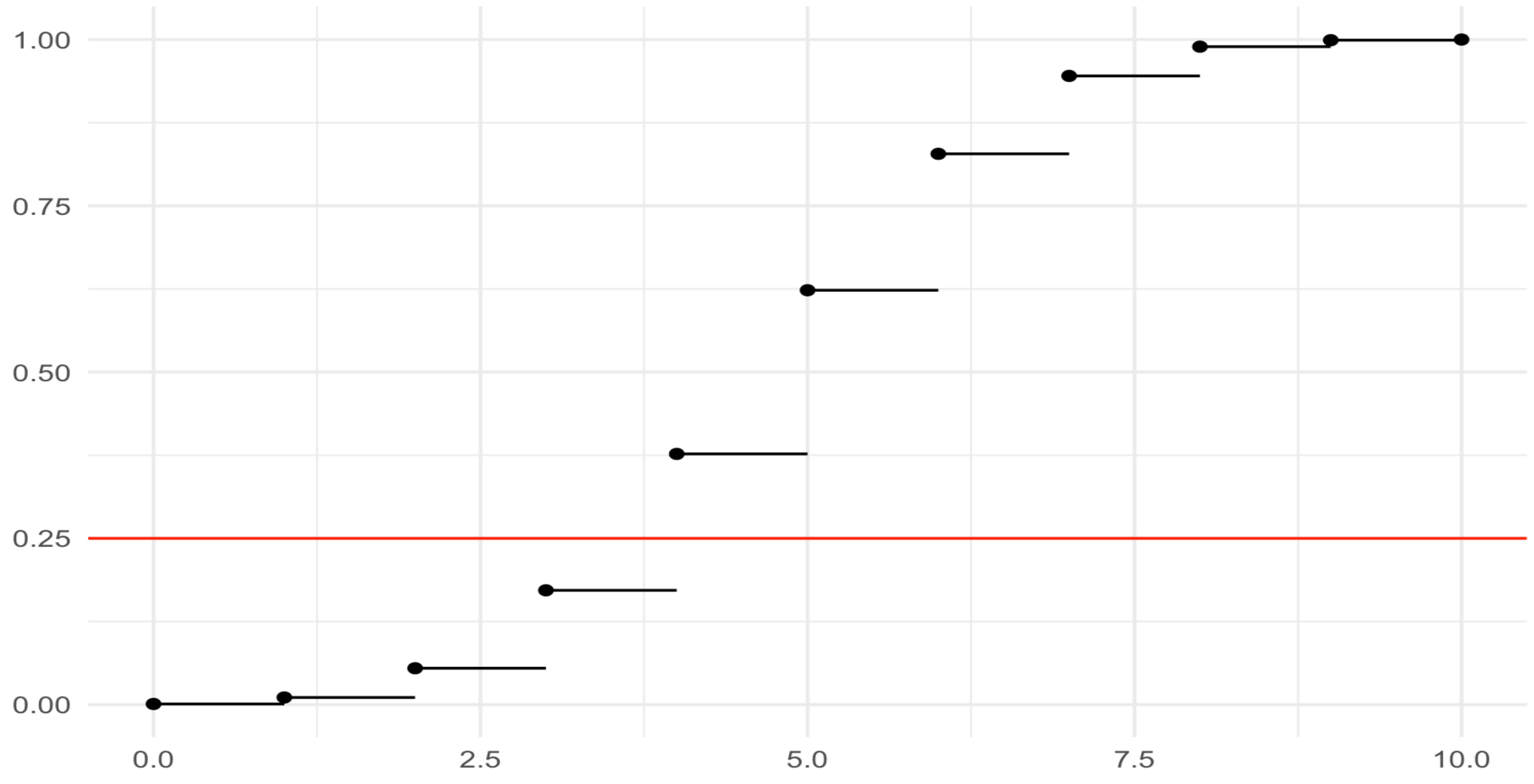
$$Q(p) = F^{-}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(X) \geq p\}$$



Recordatorio

- Si X es una variable aleatoria discreta se necesita definir la inversa generalizada

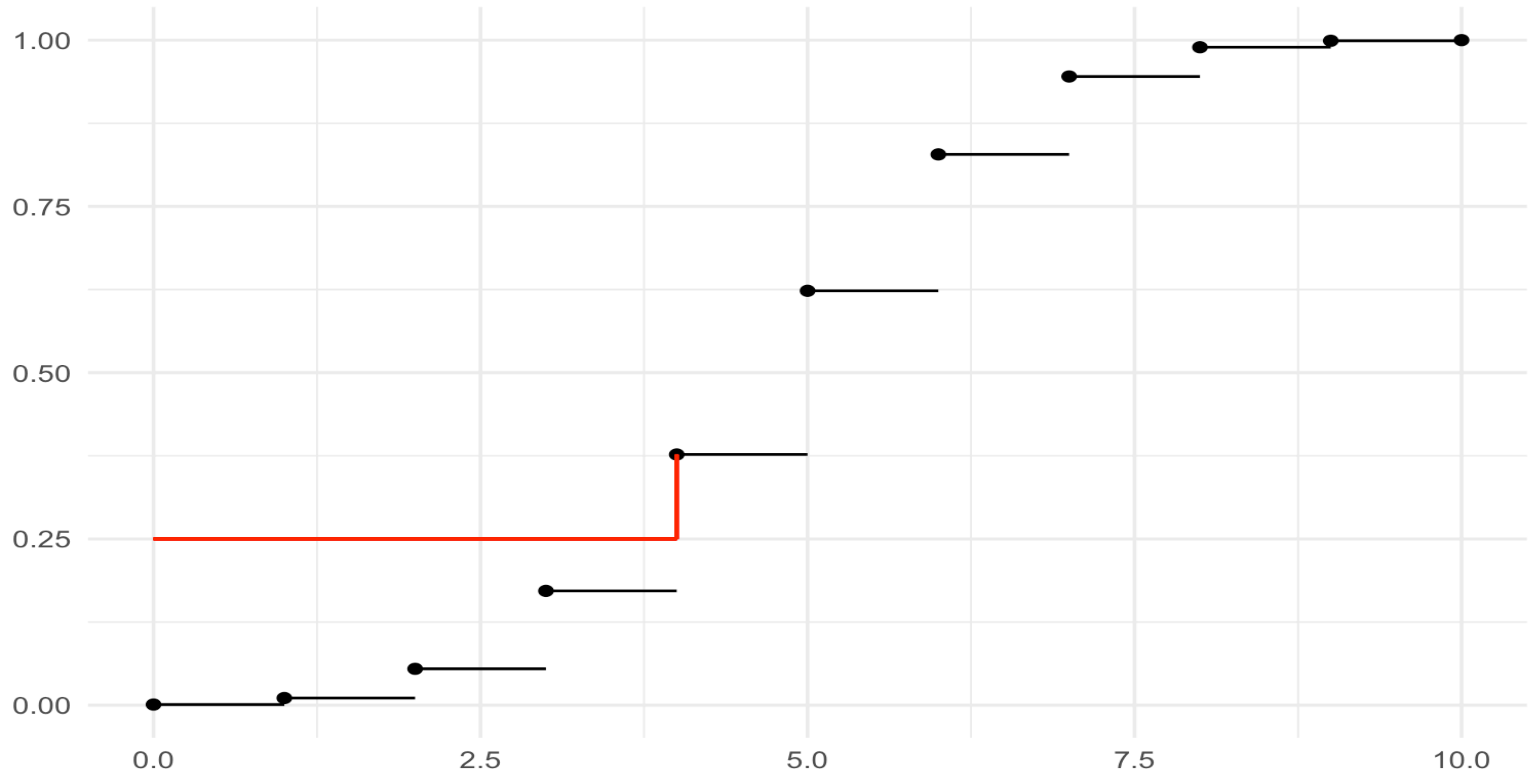
$$Q(p) = F^{-}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(X) \geq p\}$$



Recordatorio

- Si X es una variable aleatoria discreta se necesita definir la inversa generalizada

$$Q(p) = F^{-}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(X) \geq p\}$$



Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocida y se desea estimar μ

- El estimador máximo verosímil es

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- Por lo que

$$Z = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- Z es **cantidad pivotal**, esto es, depende del parámetro pero su distribución no

Ejemplo

- Si se considera $\alpha = 0.05$ entonces

$$\mathbb{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

- Lo cual sucede si y solo si

$$\mathbb{P}\left(-1.96 \leq \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{\sigma} \leq 1.96\right) = 0.95$$

- Lo cual sucede si y solo si

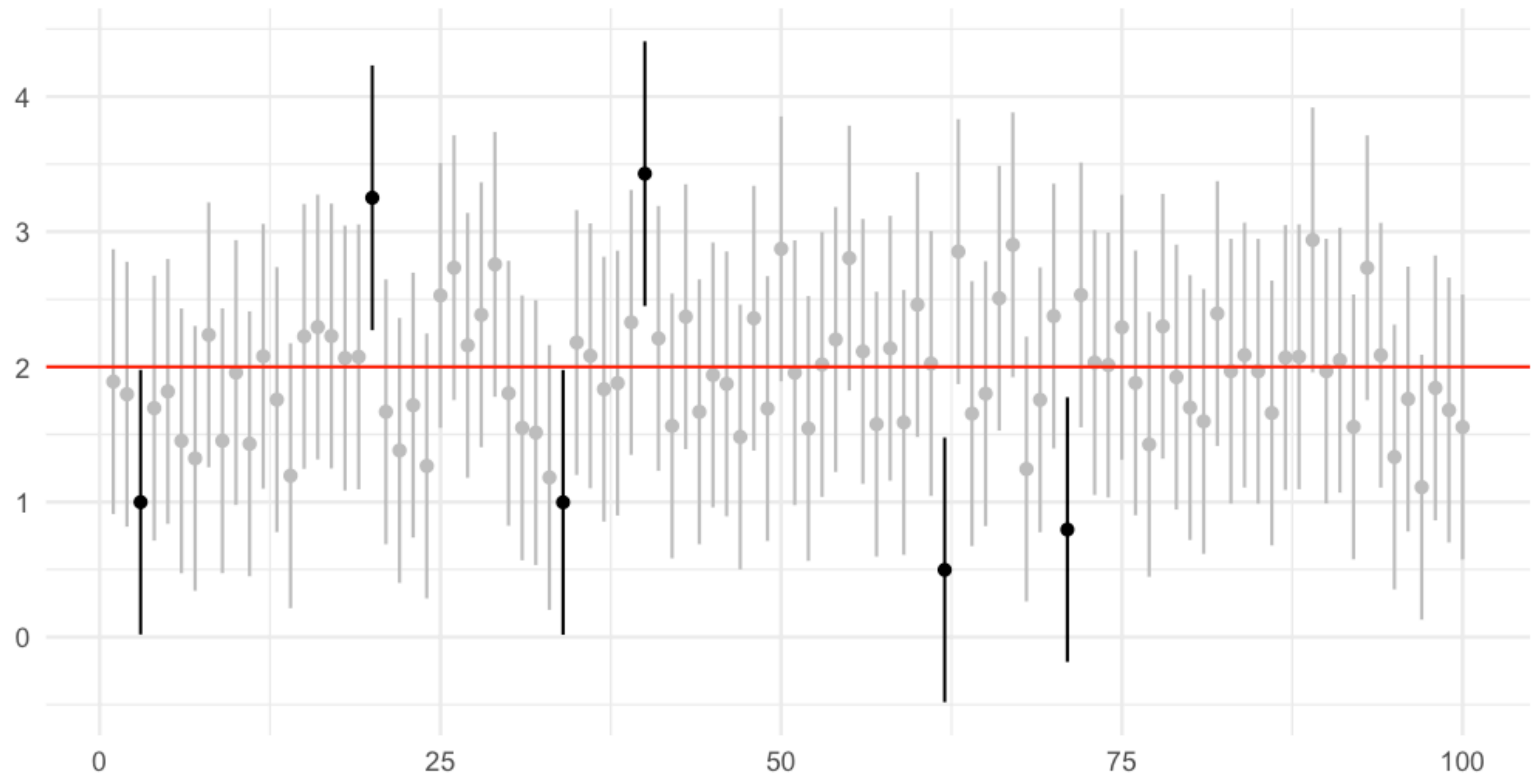
$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Ejemplo

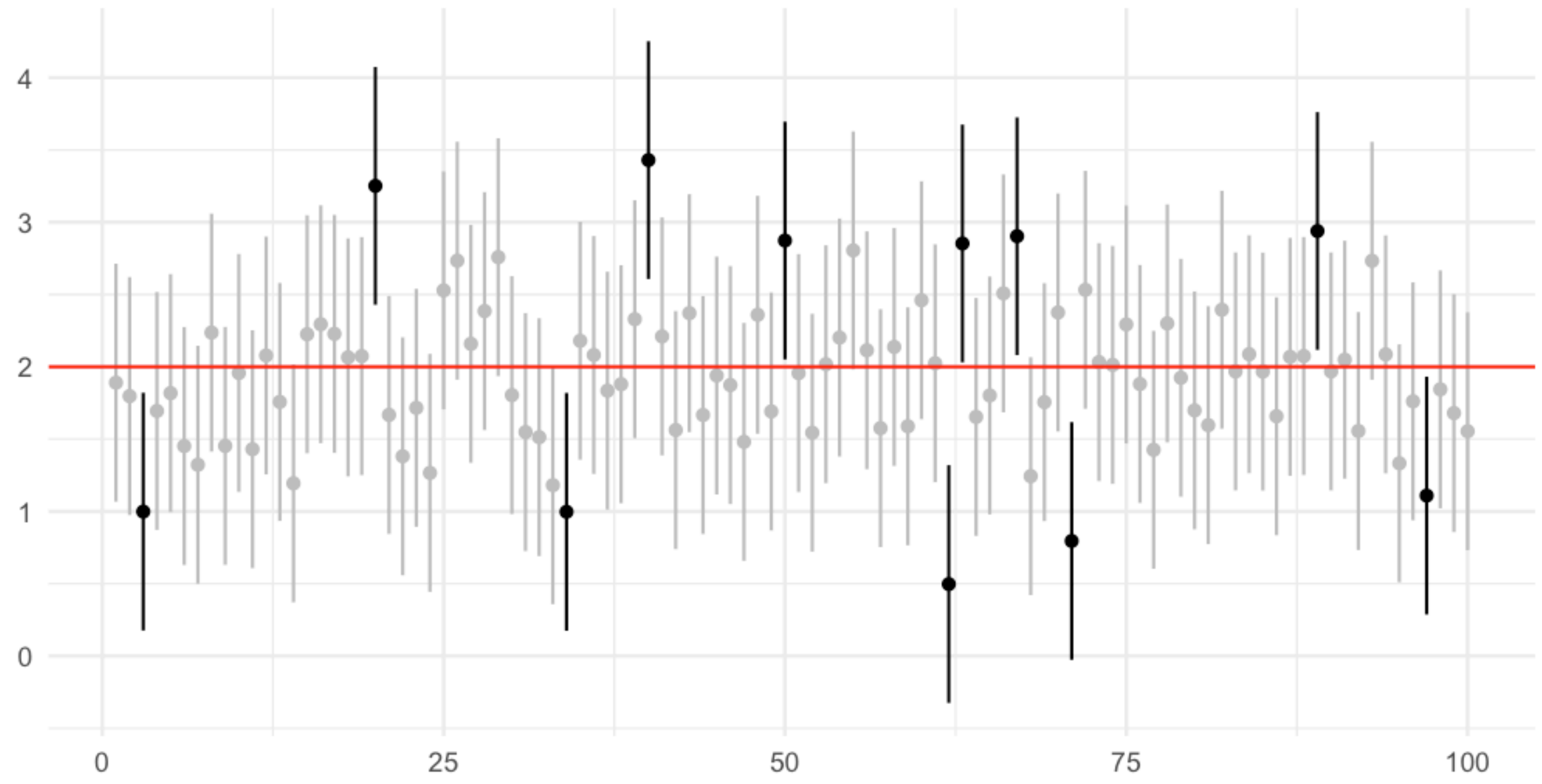
- Con un nivel de confianza del 95%

$$\mu \in \left(\bar{X} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

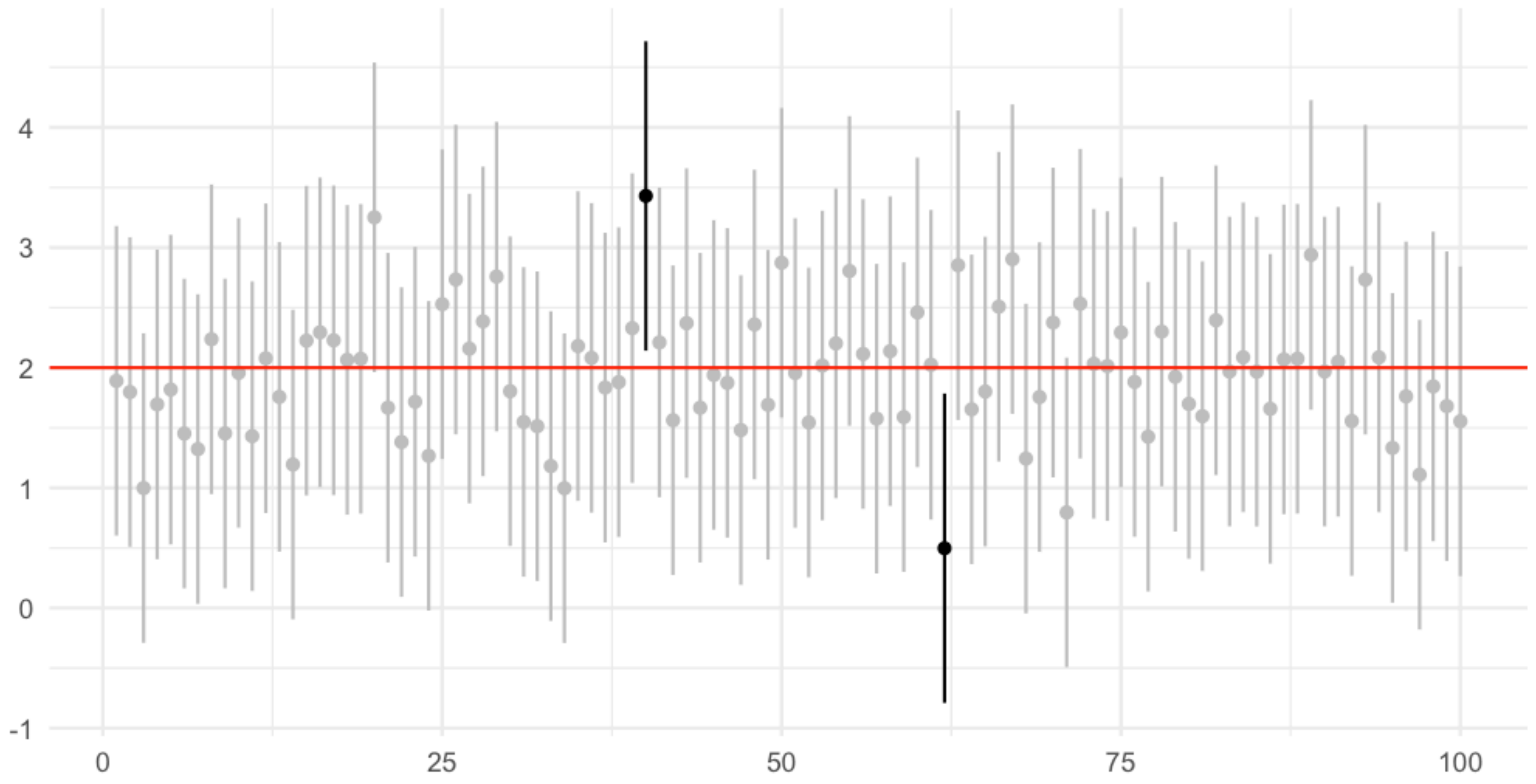
- Creando 100 intervalos a partir de 100 muestras $\mathcal{N}(2,5)$ se obtienen los intervalos



Ejemplo



Intervalos al 90%



Intervalos al 99%

Observaciones

- No son intervalos de probabilidad

- Indican que de repetirse el mismo experimento N veces, entonces en promedio $N \times (1-\alpha)\,\%$ de los intervalos capturarán al parámetro verdadero

- En el ejemplo anterior 94 de 100 intervalos lo capturaron

- A mayor confianza (menor significancia) los intervalos serán más grandes

Complicaciones

- Necesitamos conocer la distribución del estimador/estadística
- No hay único intervalo que contenga $(1-\alpha)$ de la probabilidad, e.g. para la distribución normal estándar se tienen los siguientes intervalos que acumulan 95%

Nivel de confianza	**Límite inferior**	**Límite superior**	**Longitud del intervalo**
0.95	-1.644854	Inf	Inf
0.95	-Inf	1.644854	Inf
0.95	-1.959964	1.959964	3.919928
0.95	-1.750686	2.326348	4.077034

- Encontrar el intervalo de longitud mínima (fácil para distribuciones simétricas)

Método pivotal

Definición

Sea $X_1, \ldots, X_n \sim f(x;\theta)$ (iid) y Q una función de la muestra y de θ tal que su distribución no depende del parámetro. Entonces Q es una cantidad pivotal.

- Para construir el intervalo a un α fijo:

1. Encontrar q_1 y q_2 tales que $\mathbb{P}(q_1 \leq Q \leq q_2) = 1 - \alpha$
2. Despejar a θ de Q

- Idealmente se busca el intervalo de longitud mínima

Método pivotal caso continuo

Teorema

Sea $T(X)$ una estadística con función de distribución $F_T(t;\theta)$ absolutamente continua y $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ con $\alpha \in (0,1)$. Suponer que para todo t se pueden definir θ_L y θ_U tales que

- Si F_T es decreciente como función de θ

  - $\mathbb{P}(T \leq t; \theta_U) = \alpha_1$ y $\mathbb{P}(T \leq t; \theta_L) = 1 - \alpha_2$

- Si F_T es creciente como función de θ

  - $\mathbb{P}(T \leq t; \theta_L) = \alpha_1$ y $\mathbb{P}(T \leq t; \theta_U) = 1 - \alpha_2$

Entonces $[\theta_L, \theta_U]$ es un intervalo de confianza al $(1 - \alpha) \times 100\,\%$ para θ

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$

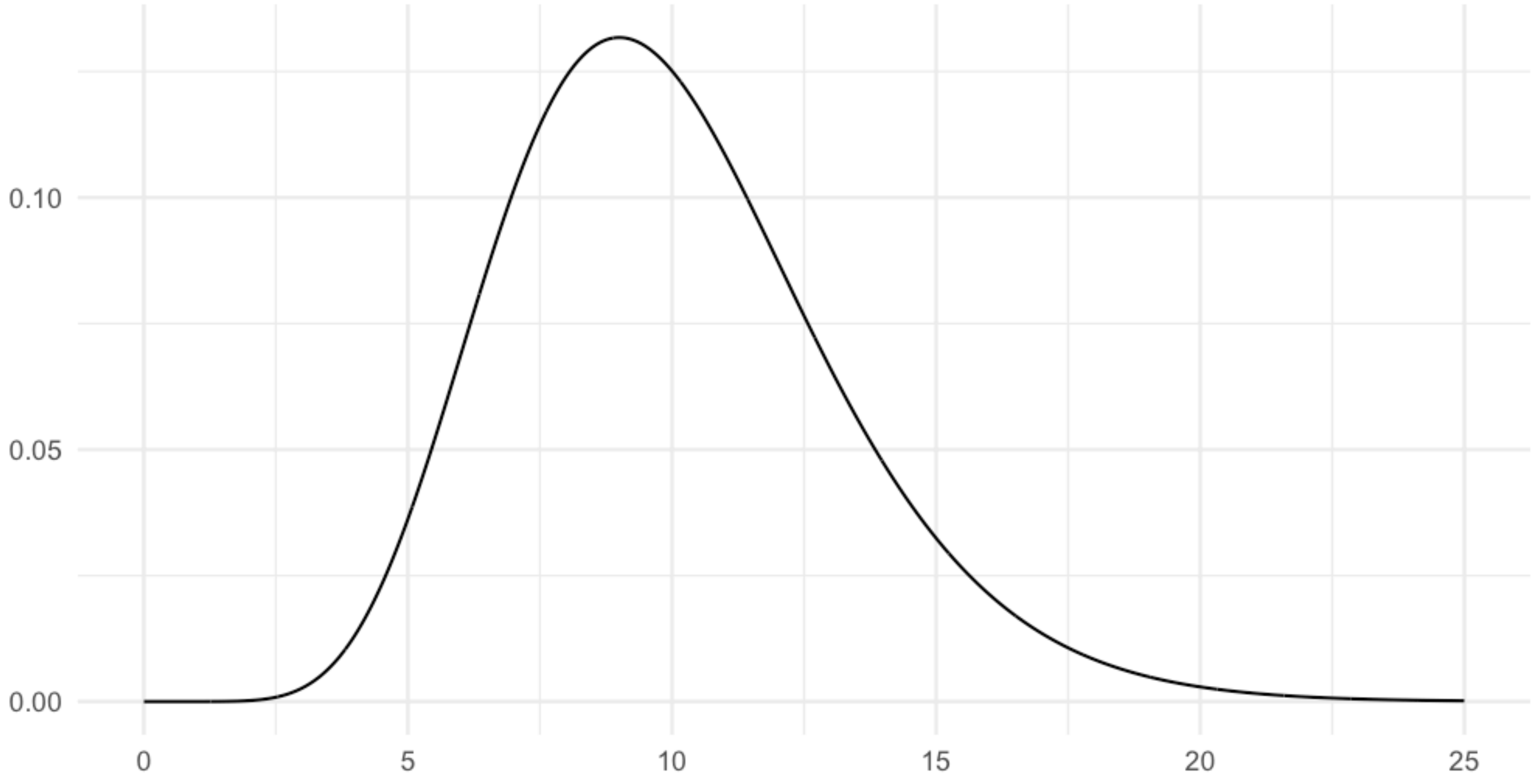
- $\bar{X}^{-1}$ es el estimador máximo verosímil (complicada de manejar)
- Sea T la estadística suficiente dada por

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(n, \lambda)$$

- (Tareita) Si se considera la transformación $Q = \lambda T$ entonces $Q \sim Ga(n,1)$
- Q es una cantidad pivotal

Ejemplo

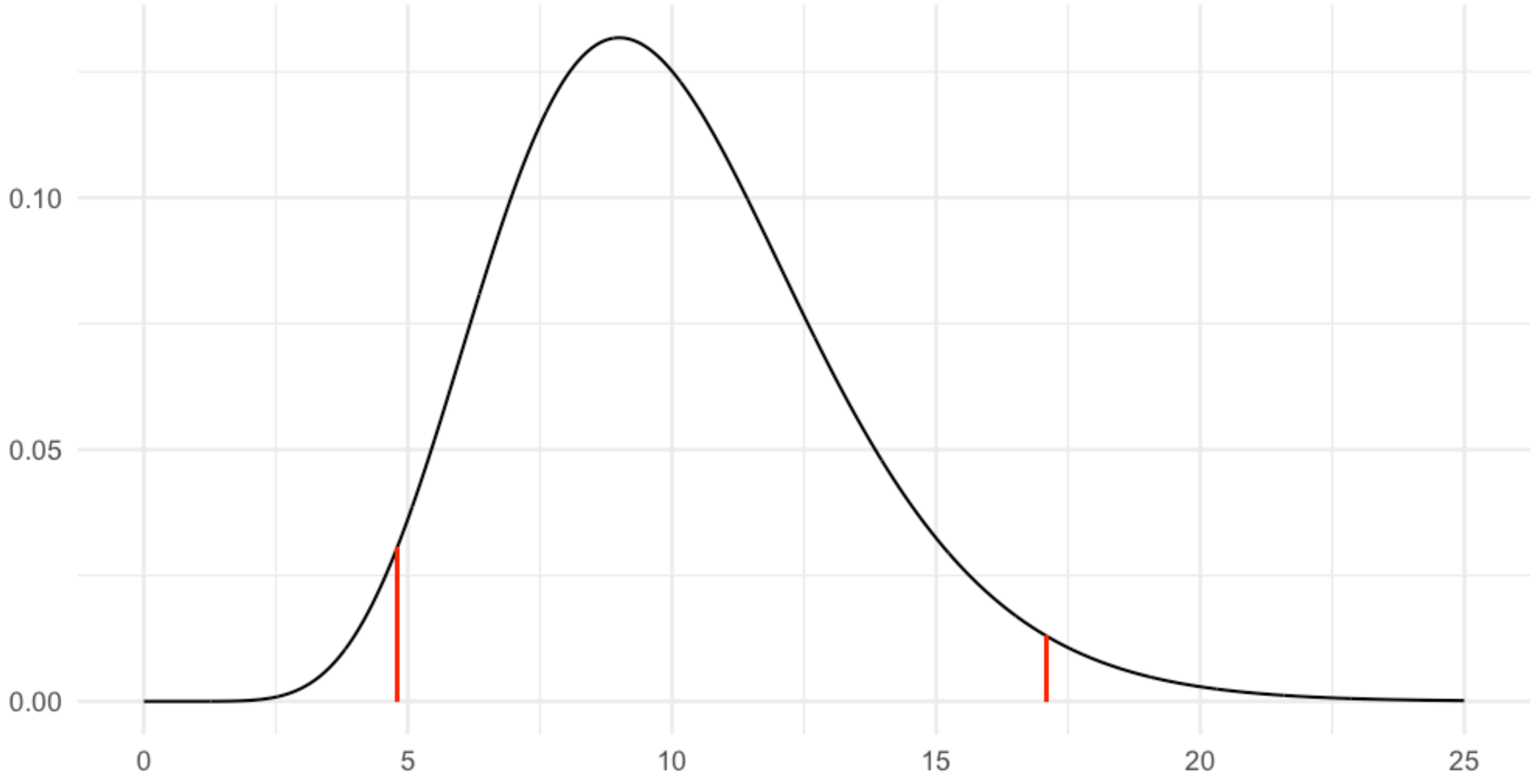
- Tomando $n = 10$ la densidad (no es simétrica) de Q está dada por



Ejemplo

- Tomando a q_1 y q_2 como los cuantiles 0.025 y 0.975 se tiene que

$$\mathbb{P}(4.795389 \leq Q \leq 17.0848) = 0.95$$

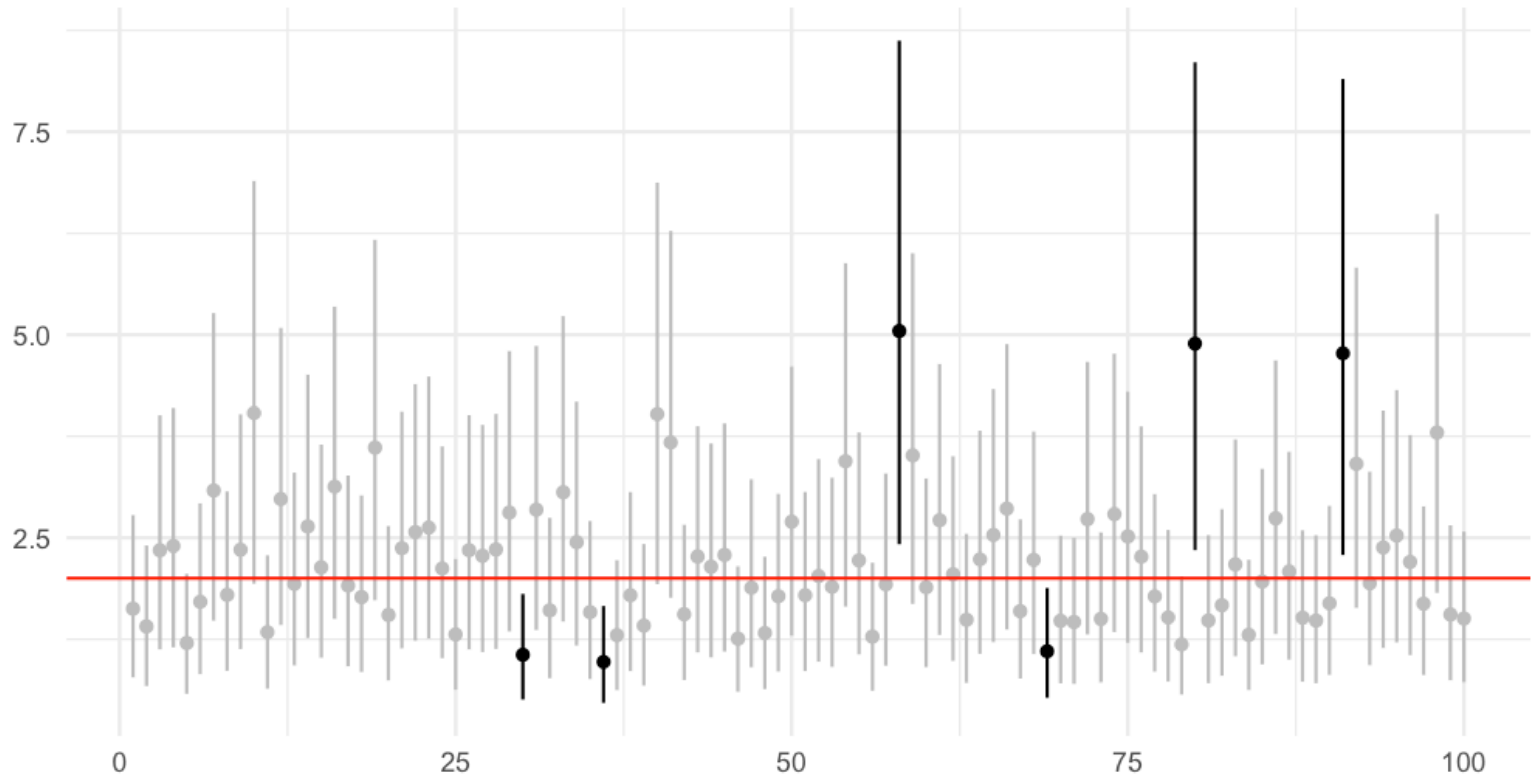


- No es el intervalo de longitud mínima que acumula en su interior $95\ \%$

Ejemplo

- Lo cual deriva en un intervalo para λ de la forma

$$\left(\frac{4.795389}{T}, \frac{17.0848}{T} \right)$$



Intervalo óptimo caso unimodal

Teorema

Sea $f(x)$ una densidad unimodal con función de distribución acumulada (cdf) $F(x)$ y considere $[a, b]$ tal que $F(b) - F(a) = 1 - \alpha$. Entonces $[a, b]$ es de longitud mínima si $f(a) = f(b) > 0$ y $a \leq x^* \leq b$ donde x^* es la moda de la distribución.

- Si la distribución es simétrica entonces a y b son los cuantiles $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$ respectivamente
- Se requiere una búsqueda numérica
- Si $f(x)$ es estrictamente decreciente en $[0,\infty)$ entonces el intervalo más corto es $[0,b)$ donde b es tal que $F(b) = 1 - \alpha$

Intervalo óptimo caso unimodal

- Encontrar a, b tal que $f(a) = f(b)$ y $F(b) - F(a) = 1 - \alpha$

Intervalo óptimo caso unimodal

- Encontrar a, b tal que $f(a) = f(b)$ y $F(b) - F(a) = 1 - \alpha$

Intervalo óptimo caso unimodal

- En el caso absolutamente continuo se encuentra como sigue:
  - Para una c fija se obtienen las raíces de $f(x) - c = 0$, denotadas como $b(c)$ y $a(c)$, donde $a(c)$ se busca para $x \leq x^*$ y $b(c)$ se busca para $x \geq x^*$
  - Se calcula la raíz de $F(b(c)) - F(a(c)) + \alpha - 1 = 0$, denotada como c^*
  - Se calcula el límite inferior como la raíz de $f(x) - c^* = 0$ para $x \leq x^*$
  - Se calcula el límite superior como la raíz de $f(x) - c^* = 0$ para $x \geq x^*$

- Equivalentemente se puede resolver

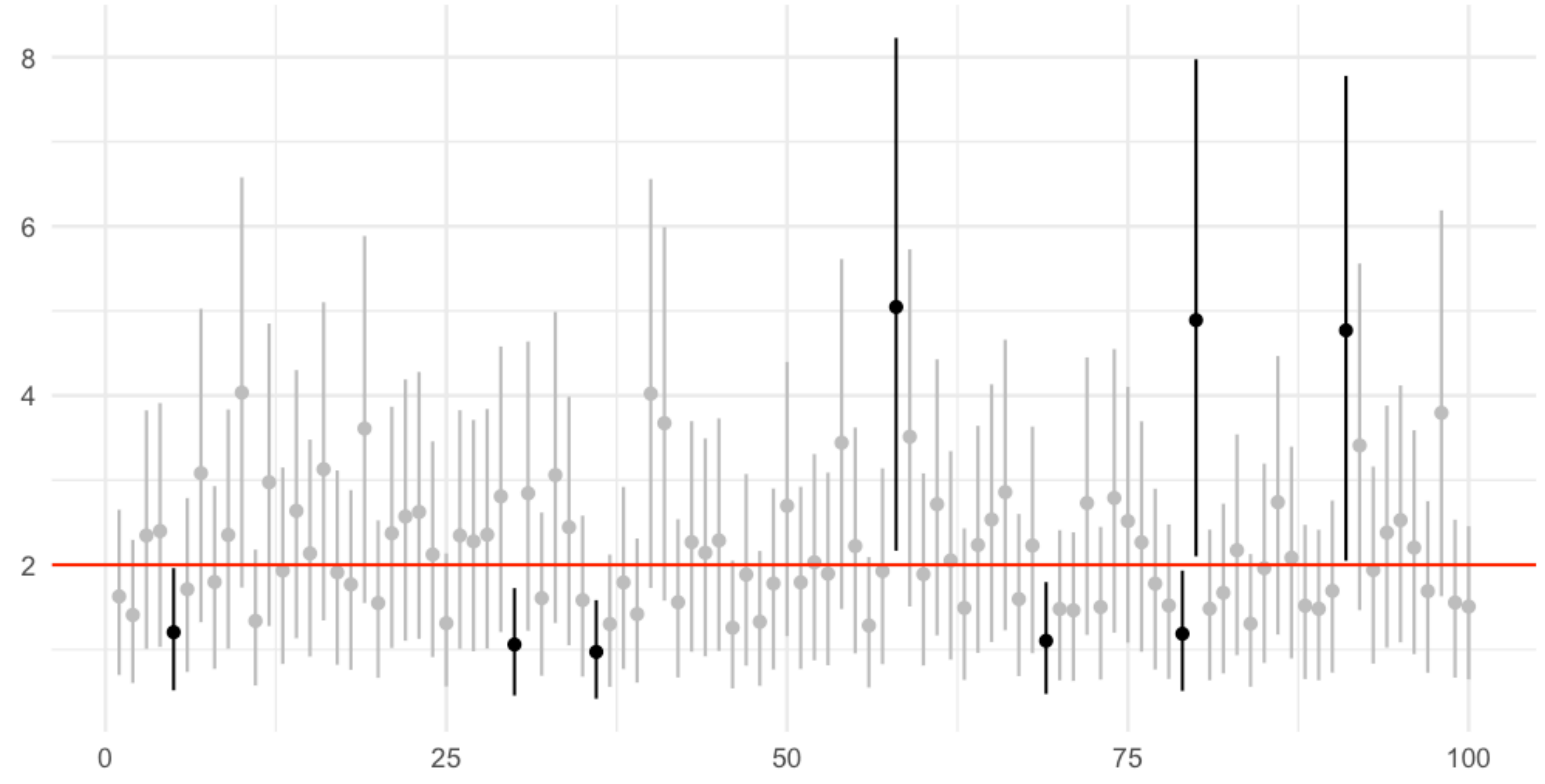
$$\min_{c \in (0,\alpha)} F^{-1}(1 - \alpha + c) - F^{-1}(c)$$

y tomar $\theta_L = F^{-1}(c^*)$ y $\theta_U = F^{-1}(1 - \alpha + c^*)$

Ejemplo

- En el ejemplo esto deriva en un intervalo para λ de la forma

$$\left(\frac{4.2920}{T}, \frac{16.3036}{T}\right)$$



Método basado en la distribución

Proposición 1

Si $X \sim F$ entonces $F(X) \sim \text{Unif}(0,1)$

Proposición 2

Si $U \sim \text{Unif}(0,1)$ entonces $-\log(U) \sim \exp(1)$

Proposición 3

Sea $X_1, \ldots, X_n \sim f(x;\theta)$ (iid) absolutamente continuas entonces $Q = \prod_{i=1}^{n} F(X_i;\theta)$ o equivalentemente $Q' = -\sum_{i=1}^{n} \log(F(X_i;\theta)$ son cantidades pivotales.

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n \sim Be(\theta, 1)$

- La distribución está dada por

$$F(x;\theta) = x^{\theta}$$

- De esta forma

$$Q = -\sum_{i=1}^{n} \log(F(X_i;\theta)) = -\theta \sum_{i=1}^{n} \log(X_i) \sim Ga(n,1)$$

- Q es cantidad pivotal

Ejemplo

- Para un nivel de significancia α se toman los cuantiles $q_{\alpha/2}$ y $q_{1-\alpha/2}$ de la distribución $Ga(n,1)$, por lo que

$$\mathbb{P}\left(q_{\alpha/2} \leq Q \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

- De esta forma

$$\mathbb{P}\left(q_{\alpha/2} \leq -\theta \sum_{i=1}^{n} \log(X_i) \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

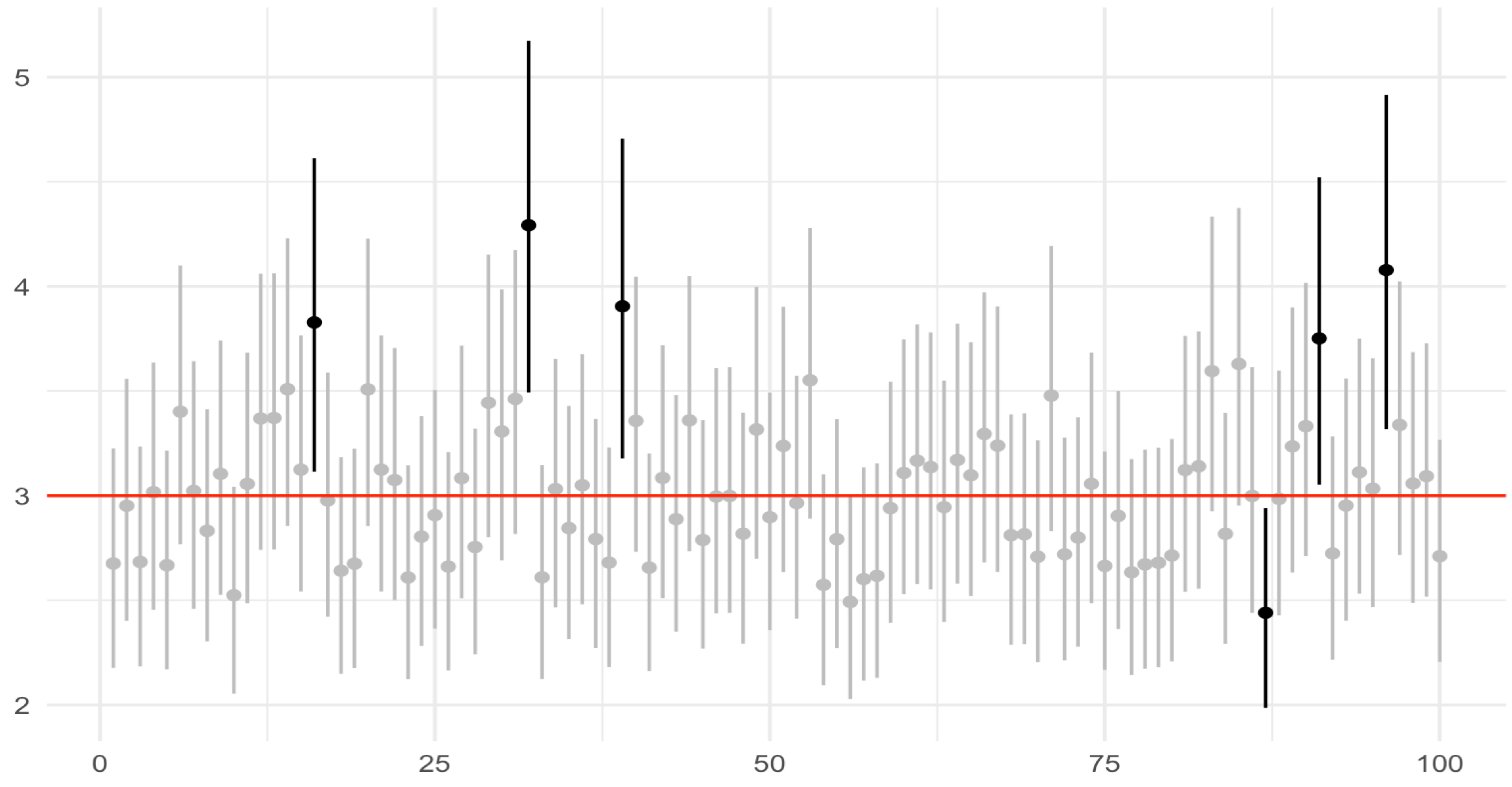
- Despejando a θ se tiene el intervalo

$$\theta \in \left(\frac{q_{\alpha/2}}{-\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)}, \frac{q_{1-\alpha/2}}{-\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)}\right)$$

Ejemplo

- Sea $n = 100$ y $\theta = 3$ entonces para un $\alpha = 0.05$ se tiene el intervalo

$$\theta \in \left(\frac{81.36399}{\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)}, \frac{120.5289}{\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)} \right)$$



Caso discreto

Teorema

Sea $T(X)$ una estadística con función de distribución $F_T(t;\theta)$ discreta y $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ con $\alpha \in (0,1)$. Suponer que para todo t se pueden definir θ_L y θ_U tales que

- Si F_T es decreciente como función de θ
  - $\mathbb{P}(T \leq t; \theta_U) = \alpha_1$ y $\mathbb{P}(T \geq t; \theta_L) = \alpha_2$
- Si F_T es creciente como función de θ
  - $\mathbb{P}(T \leq t; \theta_L) = \alpha_2$ y $\mathbb{P}(T \geq t; \theta_U) = \alpha_1$

Entonces $[\theta_L, \theta_U]$ es un intervalo de confianza al $(1 - \alpha) \times 100\,\%$ para θ

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n \sim Ber(\theta)$

- $\bar{X}$ es el estimador máximo verosímil

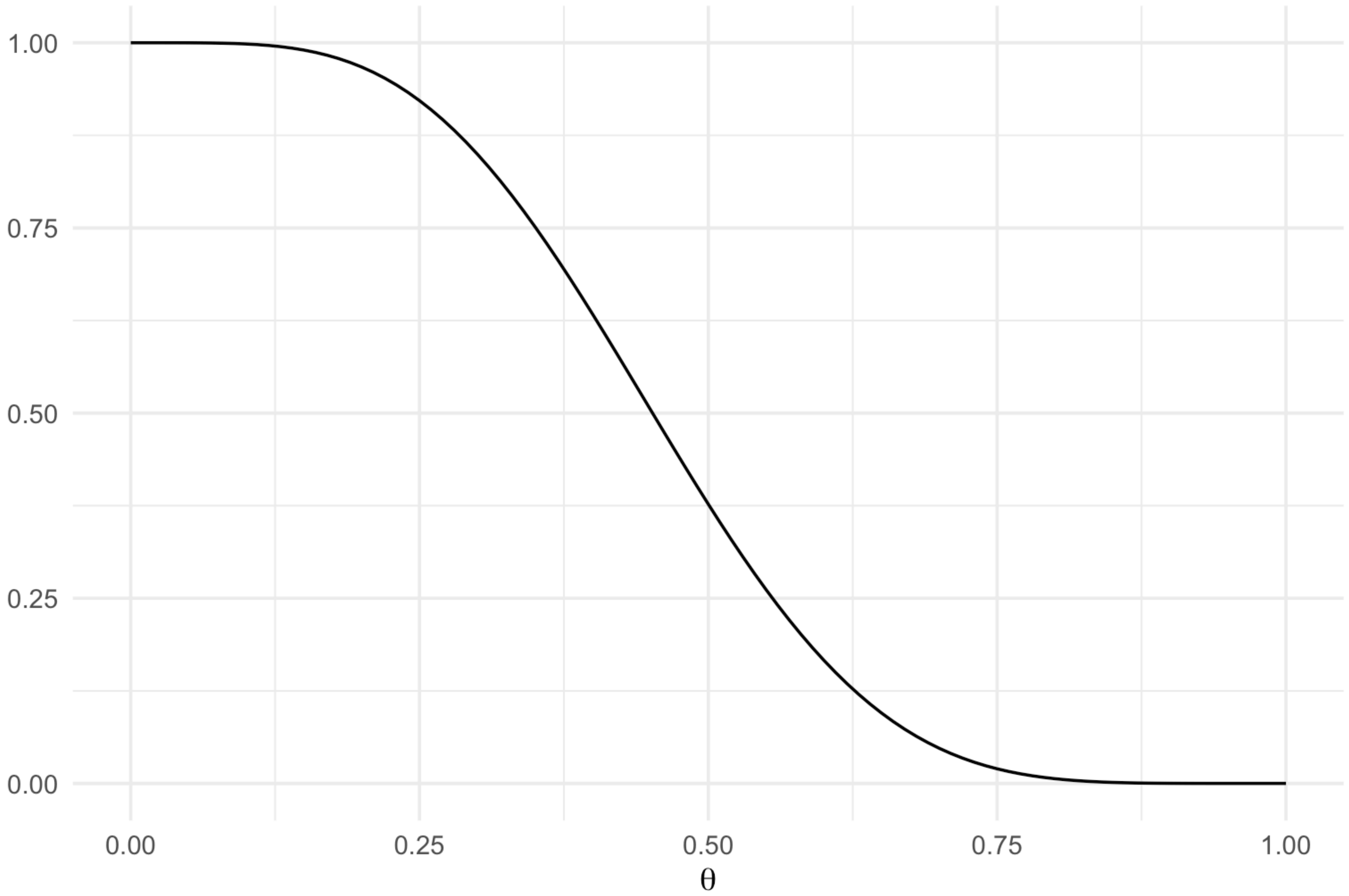
- Sea T la estadística suficiente dada por

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, \theta)$$

- Se puede ver que la distribución es decreciente con respecto a θ

Ejemplo

- La distribución como función de θ para $n = 10$ y $x = 4$



Ejemplo

- Para una n y un valor t_0 observado se necesitan θ_L y θ_U tales que

$$\mathbb{P}(T \leq t_0; \theta_U) = \sum_{t=0}^{t_0} \binom{n}{t} \theta_U^t (1-\theta_U)^{n-t} = \alpha_1$$

$$\mathbb{P}(T \geq t_0; \theta_L) = \sum_{t=t_0}^{n} \binom{n}{t} \theta_L^t (1-\theta_L)^{n-t} = \alpha_2$$

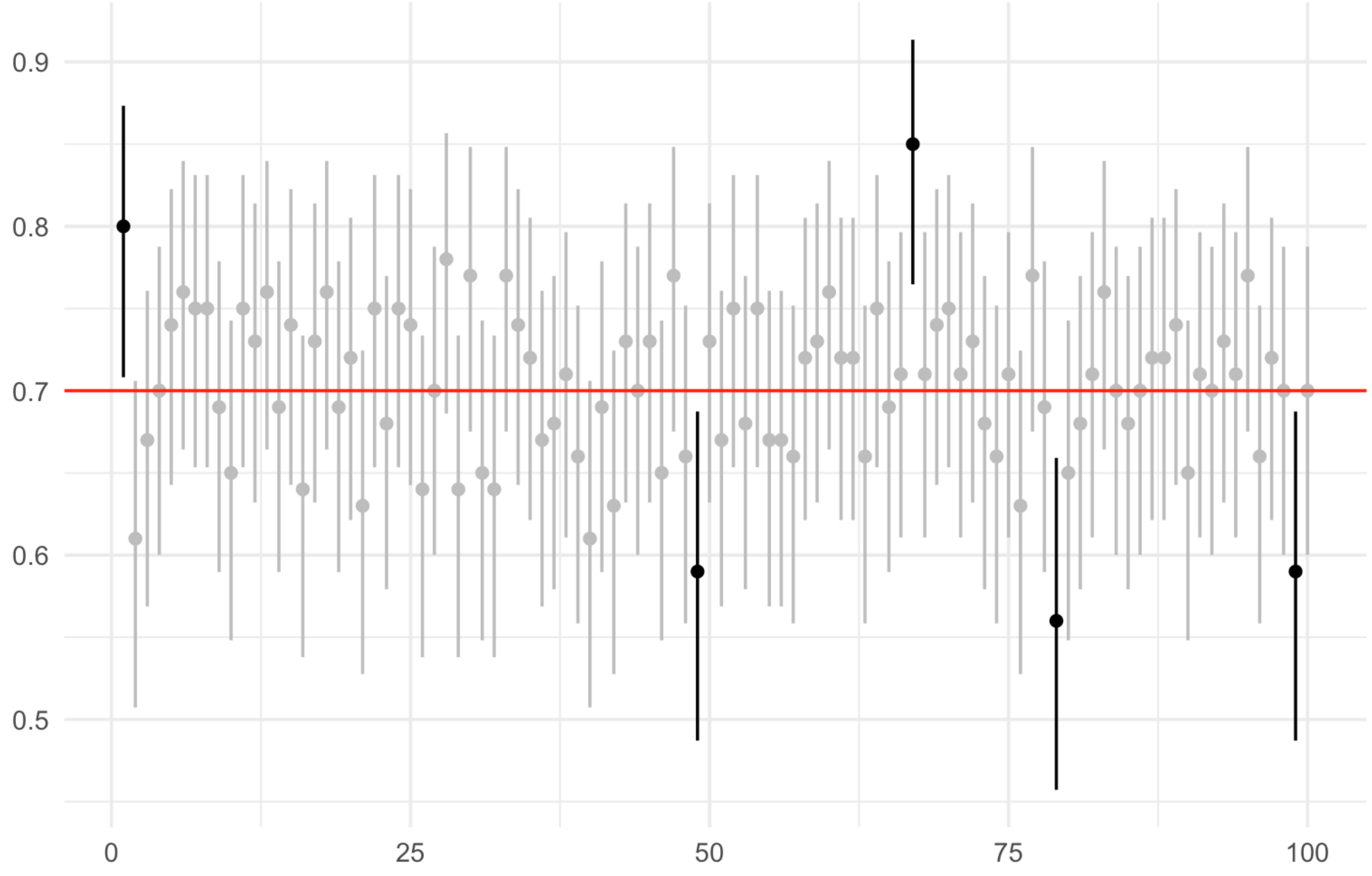
- Esto es, hay que encontrar las raíces

- En la práctica se suele tomar

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$$

Ejemplo

- Para 100 muestras de tamaño $n = 100$ de una distribución Bernoulli de parámetro $\theta = 0.7$ y tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.025$



Métodos asintóticos

- Para n suficientemente grande y bajo condiciones de regularidad

$$\hat{\tau}(\theta) \sim \mathcal{N}\left(\tau(\theta), CICR(\tau(\theta))\right)$$

- De esta manera

$$Z = \frac{\hat{\tau}(\theta) - \tau(\theta)}{\sqrt{CICR(\tau(\theta))}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

es una cantidad pivotal

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n \sim Po(\lambda)$

- $\bar{X}$ es el estimador máximo verosímil para λ

- La CICR está dada por

$$CICR(\lambda) = \frac{\lambda}{n}$$

- De esta manera

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

es una cantidad pivotal

Ejemplo

- No es fácil despejar a λ directamente

- Estimamos la CICR

$$\widehat{CICR(\lambda)} = \frac{\hat{\lambda}}{n} = \frac{\bar{X}}{n}$$

- De esta manera

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)}{\sqrt{\bar{X}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Ejemplo

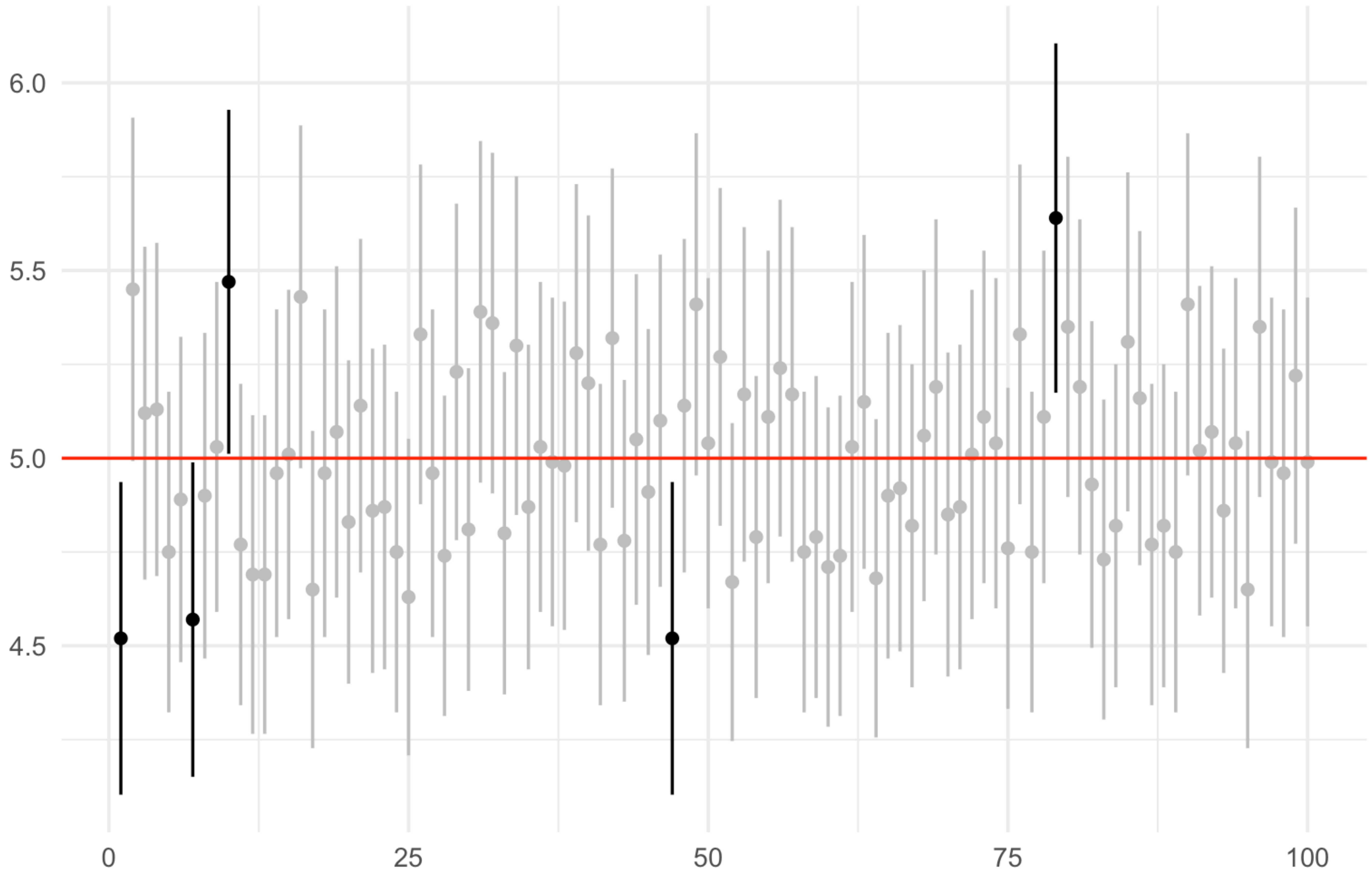
- Con un nivel de confianza del $(1-\alpha)\times 100\,\%$

$$\lambda \in \left(\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\right)$$

- $z_{1-\alpha/2}$ es el cuantil $1-\alpha/2$ de la distribución normal estándar

Ejemplo

- Tomando $n = 100, \alpha = 0.05$ y $\lambda = 5$



Métodos asintóticos

- Si se desea estimar la media de una población y para n suficientemente grande se puede utilizar el teorema central del límite el cual garantiza (siempre que la esperanza y la varianza sean finitas que)

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mathbb{E}(X))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- De esta manera Z es una cantidad pivotal

- Se tiene que estimar la varianza

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n \sim Ber(\theta)$

- Por el TCL se tiene que

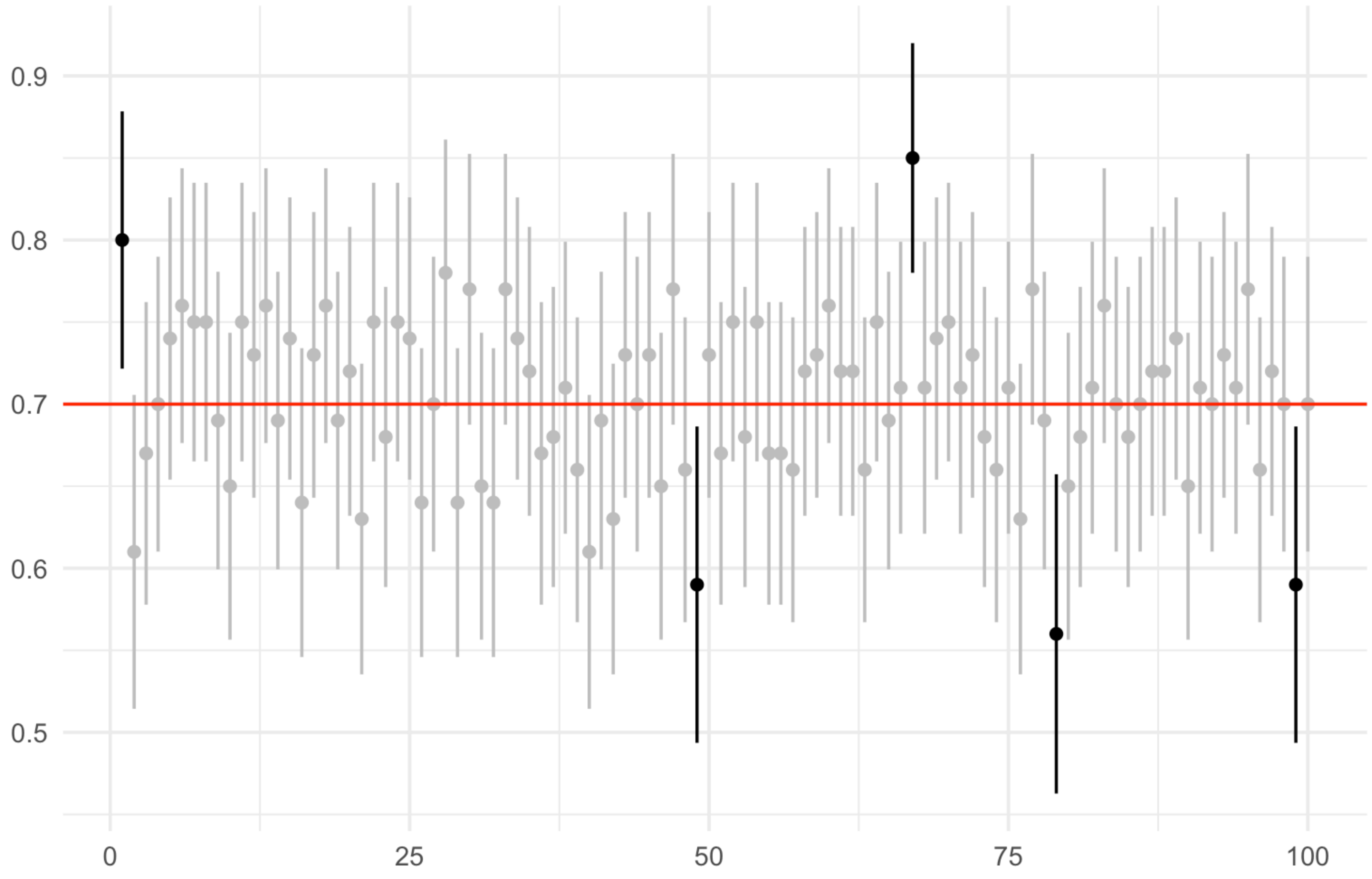
$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- Con un nivel de confianza del $(1 - \alpha) \times 100\,\%$

$$p \in \left(\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}} \right)$$

Ejemplo

- Tomando $n = 100, \alpha = 0.05$ y $\theta = 0.7$



Intervalos para una distribución gaussiana

Intervalo para la media

- Si σ^2 es conocida

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- Con un nivel de confianza del $(1 - \alpha) \times 100\,\%$

$$\mu \in \left(\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Intervalo para la media

- Si σ^2 es desconocida

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

- Por lo que

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Q/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$$

- Con un nivel de confianza del $(1-\alpha) \times 100\,\%$

$$\mu \in \left(\bar{X} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

Intervalo para la varianza

- Se tiene que

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

- Con un nivel de confianza del $(1-\alpha) \times 100\,\%$

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{q_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{q_{\alpha/2}} \right)$$

donde $q_{\alpha/2}$ y $q_{1-\alpha/2}$ son los cuantiles de la distribución χ^2_{n-1}

Intervalos para dos poblaciones normales

Comparar las medias

- Sea $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ y $Y_1, \dots, Y_m \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ independientes

- Caso 1: σ_X^2 y σ_Y^2 son conocidas

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right) \qquad \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$$

- De esta manera

$$Z = \bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$$

Comparar las medias

- Se construye intervalo para $\mu_X - \mu_Y$ como

$$\mu_X - \mu_Y \in \left((\bar{X} - \bar{Y}) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \right)$$

- Si el intervalo contiene al cero, entonces se puede asegurar al $(1-\alpha) \times 100\,\%$ que las medias de las dos poblaciones son iguales

Comparar las medias

- Caso 2: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ desconocida

$$Q_X = \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \qquad\qquad Q_Y = \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

- De esta manera $Q = Q_X + Q_Y \sim \chi^2_{m+n-2}$ y es independiente de

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Comparar las medias

- Así

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Q/(m+n-2)}} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2}} \sim t_{n+m-2}$$

- Donde S_p^2 es la varianza agrupada (pooled variance)

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

- Se construye intervalo para $\mu_X-\mu_Y$ como

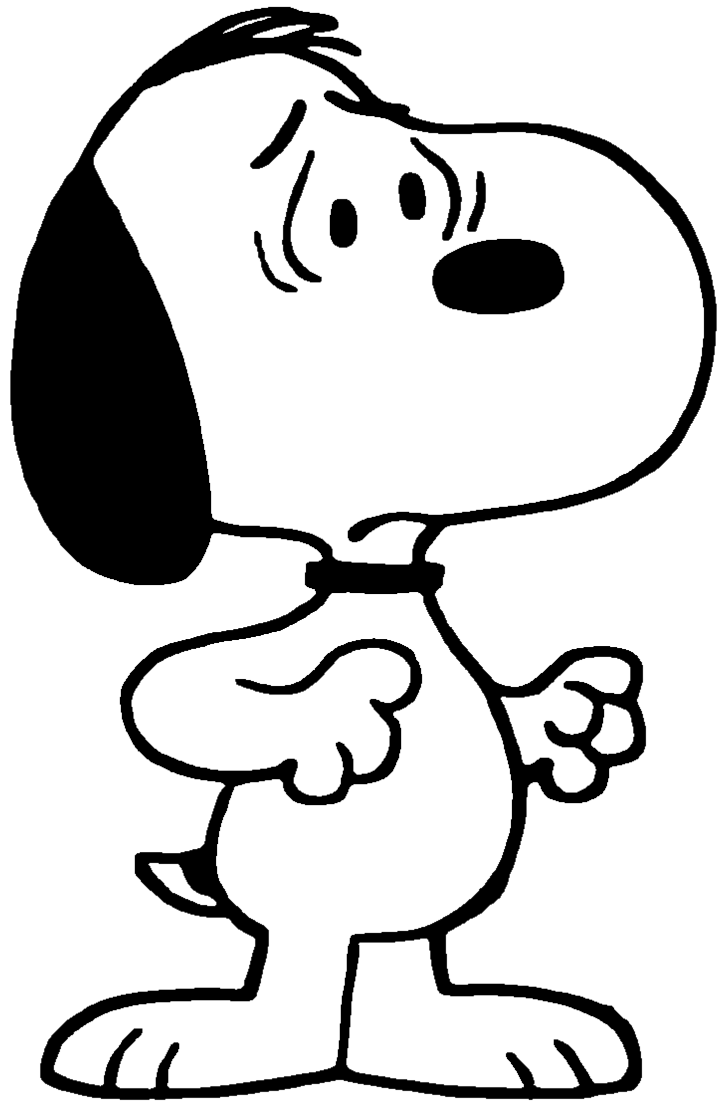
$$\mu_X-\mu_Y \in \left((\bar{X}-\bar{Y}) \pm t_{n+m-2,1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)S_p^2}\right)$$

Comparar las medias

- Caso 3: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ desconocidas (problema Behrens-Fisher)

- No tiene solución analítica

- En la práctica:
  - Prueba de Welch
  - Métodos bayesianos para encontrar la posterior de $(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2)$
  - Métodos bootstrap



Comparar las varianzas

- Como

$$Q_X = \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \qquad Q_Y = \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

- Se considera

$$F = \frac{Q_X/(n-1)}{Q_Y/(m-1)} = \frac{S_X^2\sigma_Y^2}{S_Y^2\sigma_X^2} \sim F(n-1, m-1)$$

Comparar las varianzas

- Se construye intervalo para σ_X^2/σ_Y^2 como

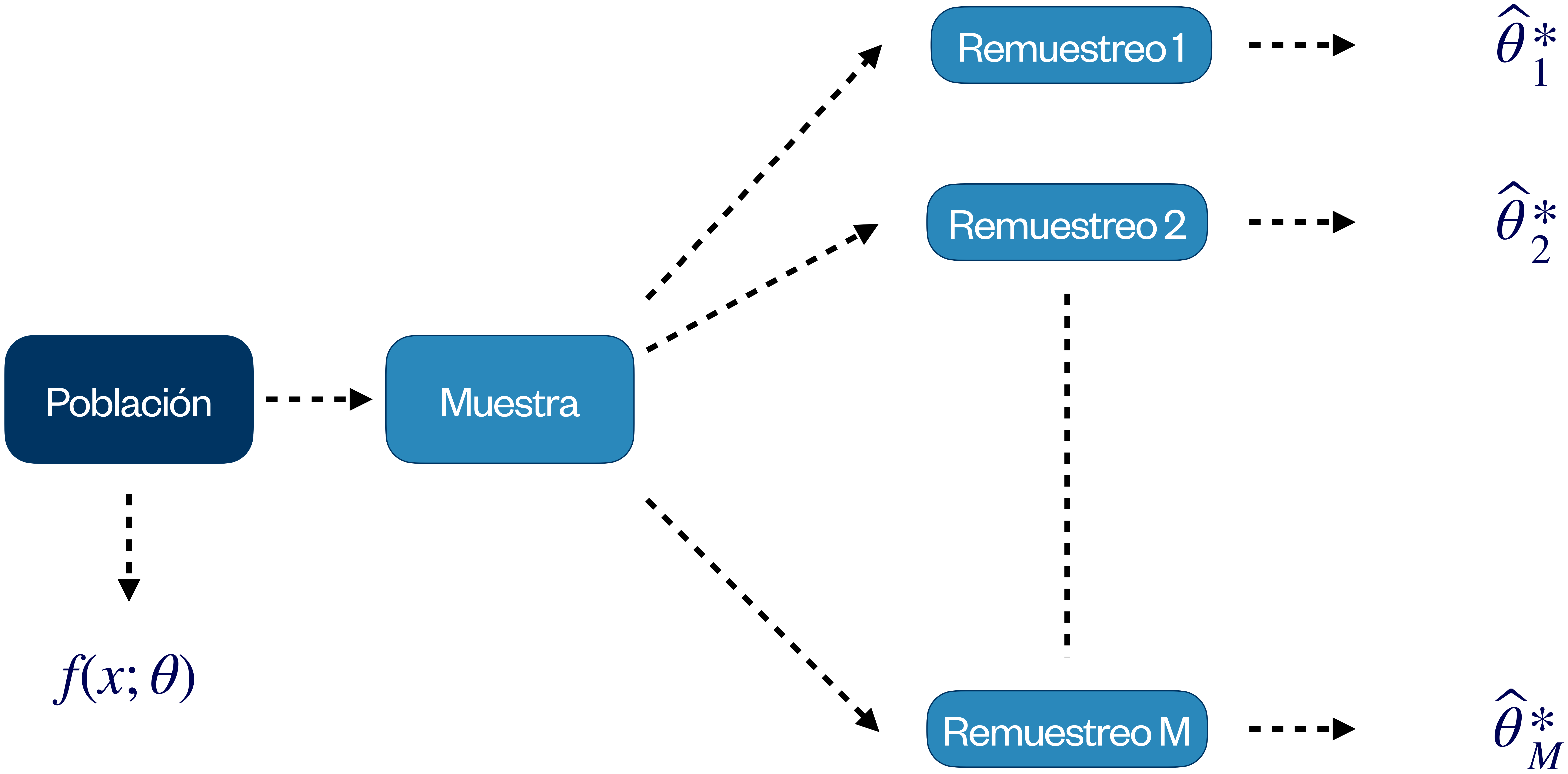
$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \in \left(\frac{S_X^2}{f_{n-1,m-1,1-\alpha/2}\, S_Y^2}, \frac{S_X^2}{f_{n-1,m-1,\alpha/2}\, S_Y^2} \right)$$

- Si el intervalo contiene al uno, entonces se puede asegurar al $(1-\alpha) \times 100\,\%$ que las varianzas de las dos poblaciones son iguales

Intervalos bootstrap

Bootstrap

- De la muestra original generar M muestras con reemplazo y para cada una obtener la estadística/estimador deseado



Intervalos de confianza

De la colección de estimadores $\widehat{\theta}_1^*(\mathbf{X}), \ldots, \widehat{\theta}_M^*(\mathbf{X})$ se pueden obtener los siguientes intervalos

- Intervalos utilizando los percentiles, e.g., si $\alpha = 0.05$ tomamos el intervalo como

$$\left(\widehat{\theta}^*_{0.025}, \widehat{\theta}^*_{0.975}\right)$$

- Intervalos bootstrap-t estudentizados (computacionalmente muy costosos)

- BCa (bias-corrected and accelerated) bootstrap

Intervalo de confianza BCa

- Calcular la constante de corrección de sesgo

$$z_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{\#\{\hat{\theta}_b^* < \hat{\theta}\}}{M}\right)$$

donde $\hat{\theta}$ es el estimador observado de la muestra

- Calcular la constante de aceleración (método Jacknife)

$$a = \frac{\sum_i (\bar{\theta} - \hat{\theta}_{-i})^3}{6\left(\sum_i (\bar{\theta} - \hat{\theta}_{-i})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

donde $\hat{\theta}_{-i}$ es el estimador observado de la muestra quitando la i-ésima observación

Intervalo de confianza BCa

- Ajustar los cuantiles

$$\alpha_1 = \Phi\left(z_0 + \frac{z_0 + z_{\alpha/2}}{1 - a(z_0 + z_{\alpha/2})}\right) \quad \alpha_2 = \Phi\left(z_0 + \frac{z_0 + z_{1-\alpha/2}}{1 - a(z_0 + z_{1-\alpha/2})}\right)$$

- Intervalos utilizando los cuantiles empíricos

$$\left(\widehat{\theta}^*_{\alpha_1}, \widehat{\theta}^*_{\alpha_2}\right)$$

- En R existe la paquetería boot

Intervalos de credibilidad (enfoque bayesiano)

Intervalos de credibilidad

- Los verdaderos intervalos de probabilidad

- Dada la distribución posterior $f(\theta \mid \mathbf{X})$ se buscan θ_L y θ_U tales que

$$\int_{\theta_L}^{\theta_U} f(\theta \mid \mathbf{X}) d\theta = 1 - \alpha$$

- En la práctica es común escoger θ_L y θ_U tales que

$$\mathbb{P}(\theta < \theta_L \mid \mathbf{X}) = \mathbb{P}(\theta > \theta_U \mid \mathbf{X}) = \frac{\alpha}{2}$$

- No son necesariamente los mejores

Regiones de alta densidad

Definición

Una región de alta densidad es una región $\mathscr{C}$ que contiene el $(1-\alpha)\times 100\,\%$ de la distribución posterior y que tiene la propiedad de que para todo $\theta_1 \in \mathscr{C}$ y para todo $\theta_2 \in \mathscr{C}$

$$f(\theta_1 \mid \mathbf{x}) \geq f(\theta_2 \mid \mathbf{x})$$

- Pueden resultar complicados de obtener

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n \sim Ber(\theta)$ donde $\theta \sim Be(\alpha, \beta)$

- La distribución posterior está dada por

$$\theta \mid \mathbf{x} \sim Be\left(\alpha + \sum_i X_i, \beta + n - \sum_i X_i\right)$$

- Al 95% se toman θ_L y θ_U como los cuantiles $q_{0.025}$ y $q_{0.975}$ de la distribución posterior

Ejemplo

Si $n = 20$ con $\theta = 0.7$ entonces los tres intervalos al 95% están dados por:

Método	Estimador	Límite Inf.	Límite Sup.
EMV	0.85	0.6210	0.9679
Boots	0.848	0.550	0.9455
Bayes	0.81	0.6365	0.950