Inferencia Estadística: Tarea 3

Pruebas de hipótesos

Fecha de entrega: 24 de noviembre

1. Sea $X_1, \ldots, X_{200}$ una muestra de una población $Ber(p)$, donde se desea constrastar

$$H_0 : p = 0.8 \quad \text{vs} \quad H_1 : p = 0.3.$$

   Encuentra la región crítica y el nivel de significancia suponiendo que se quiere tener una potencia igual a 0.5.

2. El número de llamadas que recibe un conmutador sigue una distribución Poisson. Se quiere contrastar la hipótesis

$$H_0 : \lambda = 2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda = 5.$$

   Supón que el nivel de significancia es $\alpha = 0.1$. Dada una muestra aleatoria de tamaño 50 de dicha distribución, se obtuvo una media muestral de 3.7.

   i. ¿Cuál es la potencia del contraste?

   ii. Con la información muestral que tienes, ¿Con qué hipótesis te quedas? (Argumenta tu respuesta).

   iii. Supón ahora que la prueba de hipótesis es

$$H_0 : \lambda = 2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda > 2,$$

   grafica la función potencia.

3. Se lanza una moneda 100 veces y se obtiene 59 águilas. Si denotamos a p como la probabilidad de que salga águila y fijamos un nivel de significancia del 10%.

   i. Contraste $H_0 : p = 0.5$ vs $H_1 : p < 0.5$.

   ii. Contraste $H_0 : p = 0.5$ vs $H_1 : p \neq 0.5$.

4. Sea $Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3 \leq Y_4$ los estadísticos de orden de una muestra de tamaño $n = 4$ de una distribución uniforme en $(0, \theta)$ con $\theta > 0$. Considere la hipótesis $H_0 : \theta = 1$ *vs* $H_1 : \theta > 1$ y suponga la región crítica para esta prueba $C = \{Y_4 \geq c\}$.

   (i) Encuentre c tal que el contraste de hipótesis tiene un nivel de significancia $\alpha = .05$.

   (ii) Encuentre la función potencia de la prueba y grafíquela.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución $Be(\mu, 1)$ y sea $Y_1, \ldots, Y_m$ una muestra aleatoria de tamaño m de una distribución $Be(\theta, 1)$. Suponga ambas muestras independientes y defina $U_i = -\log(X_i)$, para $i = 1, ..., n$ y $V_j = -\log(Y_j)$ para $j = 1, ..., m$.

   (i) Realice el contraste $H_0 : \theta = \mu$ vs $H_1 : \theta \neq \mu$

   (ii) Demuestra que la prueba en (i) puede expresarse en términos de la estadística

   $$T = \frac{\sum_i U_i}{\sum_i U_i + \sum_j V_j}$$

   (iii) Encuentre la distribución de T bajo H_0 y muestre como obtener una estadística de prueba de tamaño $\alpha = .1$ *Hint: Muestre que bajo H_0, U_i y V_j se distribuyen exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ y encuentre la distribución de la transformación T.*

6. Para $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $Ber(p)$ se desea probar

   $$H_0 : p = .49 \quad \text{vs} \quad H_1 : p = .51$$

   Utilice el teorema del límite central para determinar aproximadamente el tamaño de muestra necesario para que la probabilidad de los dos tipos de error sean aproximadamente igual a .01.

7. Suponga que un fabricante de cigarros envía 2 muestras de su producto, presumiblemente idénticas, a dos laboratorios diferentes. En cada laboratorio se determinó el nivel de nicotina , en gramos, de cada cigarro; observándose $(24, 27, 26, 21)$ en la primera muestra y $(27, 28, 23, 31, 26)$ en la segunda muestra. Para un nivel de significancia $\alpha = .05$ ¿se puede considerar que los dos laboratorios midieron los mismos niveles de nicotina? (Suponga normalidad y varianza común en ambas muestras).

8. Dada las muestras independientes $(1.8, 2.9, 1.4, 1.1)$ y $(5, 8.6, 9.2)$ de dos poblaciones con distribución normal $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Pruebe con un nivel de significancia $\alpha = .05$

   $$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2.$$

9. Para cada una de las siguiente hipótesis encuentre el p-valor de los datos observados.

   (i) Para la prueba $H_0 : \theta \leq \frac{1}{2} \quad vs \quad H_1 : \theta > \frac{1}{2}$ se observaron 7 éxitos de 10 ensayos Bernoulli.

   (ii) Para la prueba $H_0 : \lambda \leq 1 \quad vs \quad H_1 : \lambda > 1$ se observó $X = 3$, donde $X \sim$Poisson(λ).

   (iii) Para la prueba $H_0 : \lambda \leq 1 \quad vs \quad H_1 : \lambda > 1$ se observó $X_1 = 3, X_2 = 5, X_3 = 1$, donde las $X_i's$ son v.a. independientes con distribución Poisson(λ).

10. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Poisson(λ), con $\lambda > 0$ y función de densidad

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, , \ldots$$

   (i) Pruebe la hipótesis $H_0 : \lambda = \lambda_0 \ vs \ H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. Para eso encuentre la región crítica correspondiente al cociente de verosimilitudes generalizado.

   (ii) Una regla de decisión razonable para la hipótesis anterior es rechazar H_0 si $|\bar{X} - \lambda_0| > c$. Para $\alpha = .05$ encuentre c tal que $\mathbb{P}_{\lambda_0}(|\bar{X} - \lambda_0| > c) = .05$. (Suponga n suficientemente grande y utilice el teorema central del límite).