Otras distribuciones multivariadas

José A. Perusquía Cortés

Análisis Multivariado Semestre 2025-II

Distribuciones elípticas y esféricas

Grupo

Definición 1

Un conjunto no vacío, G, de transformaciones de $\mathscr{X}$ en si mismo se dice que es un grupo si satisface

1. Dados $g_1, g_2 \in G$ entonces, $g_1 g_2 \in G$
2. Dados $g_1, g_2, g_3 \in G$, entonces $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
3. Existe una transformación identidad, $e \in G$, tal que $eg = ge = g$
4. Para todo $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Definición 2

Dos puntos $x_1, x_2 \in \mathscr{X}$ son equivalentes con respecto a G si existe $g \in G$ tal que $x_2 = gx_1$, denotado como $x_1 \sim x_2 (\mathrm{mod}\ G)$ y forma una relación de equivalencia.

Grupo

Definición 3

Una función, $f(x)$, es invariante con respecto a G si se cumple que $f(gx) = f(x)$ para todo $x \in \mathscr{X}$ y para toda $g \in G$

Definición 4

Una función, $f(x)$, es invariante maximal con respecto a G si

1. f es invariante
2. $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 \sim x_2 (\text{mod } G)$

Grupo

Teorema 1

Sea $f(x)$ una función que es invariante maximal con respecto a G, entonces $h(x)$ es invariante con respecto a G, si y solo si, h es función de f

Observación 1

Si $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$ y se considera al grupo de matrices ortogonales, $G = \mathscr{O}(n)$, entonces $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$ es una función invariante maximal

Distribuciones esféricas

Definición 5

Un vector aleatorio $\mathbf{y}$ tiene una distribución esférica si para toda $\Gamma \in \mathcal{O}(n)$ se tiene que $\mathbf{y} \overset{d}{=} \Gamma \mathbf{y}$

Teorema 2

Un vector aleatorio $\mathbf{y}$ tiene una distribución esférica, si y solo si, su función característica $\phi_{\mathbf{y}}(t)$, satisface alguna de estas condiciones equivalentes

1. $\phi_{\mathbf{y}}(\Gamma^T t) = \phi_{\mathbf{y}}(t)$ para toda $\Gamma \in \mathcal{O}(n)$
2. Existe una función escalar (generador característico) $\varphi(\,\cdot\,)$, tal que $\phi_{\mathbf{y}}(t) = \varphi(t^T t)$

Proposición 1

Sea un vector aleatorio $\mathbf{y} \sim S_n(\phi)$ entonces, $\mathbf{y} \overset{d}{=} r\mathbf{u}^{(n)}$, donde r es una variable positiva y $\mathbf{u}^{(n)}$ es un vector que se distribuye uniformemente en la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ independiente de r

Propiedades

Observación 2

Una densidad esférica puede representarse en coordenadas polares mediante la transformación

$$
\begin{aligned}
y_1 &= r\sin(\theta_1) \\
y_2 &= r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \\
y_3 &= r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\sin(\theta_3) \\
&\vdots \\
y_{p-1} &= r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cdots\cos(\theta_{p-2})\sin(\theta_{p-1}) \\
y_p &= r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cdots\cos(\theta_{p-2})\cos(\theta_{p-1})
\end{aligned}
$$

donde

- Para $i \in 1,\ldots,p-2$ se tiene que $-\dfrac{\pi}{2} < \theta_i \leq \dfrac{\pi}{2}$ y $-\pi < \theta_{p-1} \leq \pi$
- $0 \leq r < \infty$

Propiedades

Proposición 2

La densidad de $(R, \Theta_1, \ldots, \Theta_{p-1})$ es

$$r^{p-1}\cos(\theta_1)^{p-2}\cos(\theta_2)^{p-3}\cdots\cos(\theta_{p-2})g(r^2)$$

Observación 3

Las variables aleatorias $R, \Theta_1, \ldots, \Theta_{p-1}$ son independientes

Proposición 3

La distribución marginal de R es

$$\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}r^{p-1}g(r^2)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$$

Propiedades

Proposición 4

La distribución marginal de Θ_i para $i \in 1, \ldots, p-2$ está dada por

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p-i}{2}\right)\cos(\theta_i)^{p-i-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-i-1}{2}\right)}$$

y Θ_{p-1} es una variable aleatoria uniforme, con densidad,

$$\frac{1}{2\pi}$$

Distribuciones elípticas

Definición 6

Decimos que el vector aleatorio $\mathbf{x}$ tiene una distribución elíptica con parámetros ν y Λ, denotado por $\mathbf{x} \sim EC_n(\nu, \Lambda, \phi)$, si

$$\mathbf{x} \stackrel{d}{=} \nu + \mathbf{A}^T\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y} \sim S_k(\phi)$$

donde $\mathbf{A}_{k\times n}$ es una matriz tal que $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \Lambda$ y donde $\operatorname{ran}(\Lambda) = k$

Observación 4

Una condición necesaria para que exista la densidad es que $\operatorname{ran}(\Lambda) = n$

Distribuciones elípticas

Definición 7

Decimos que el vector aleatorio $\mathbf{x}$ tiene una distribución elíptica, denotado por $\mathbf{x} \sim EC(\nu, \Lambda, g)$, si su densidad está dada por

$$|\Lambda|^{-\frac{1}{2}} g\left[(\mathbf{x}-\nu)^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x}-\nu)\right],$$

donde $\Lambda > 0$, $g(\,\cdot\,) \geq 0$ y $\int g(\mathbf{y}^T\mathbf{y})d\mathbf{y} = 1$.

Observación 5

Si $\mathbf{C}$ es una matriz no singular tal que $\mathbf{C}^T\Lambda^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}$, y considerando la transformación $\mathbf{x} - \nu = \mathbf{C}\mathbf{y}$, entonces el vector aleatorio $\mathbf{y}$ tiene densidad,

$$g(\mathbf{y}^T\mathbf{y})$$

Propiedades

Proposición 5

Sea $\mathbf{x} \sim EC_n(\nu, \Lambda, g)$ entonces,

1. $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \nu$
2. $\text{Var}(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbb{E}(r^2)\Lambda}{n}$
3. $\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mu \sim EC_n(\mu + \mathbf{D}^T\nu, \mathbf{D}^T\Lambda\mathbf{D}, g_1)$
4. Si consideramos la partición

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \nu = \begin{pmatrix} \nu^{(1)} \\ \nu^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$$

entonces, $\mathbf{x}^{(1)} \sim EC_n\left(\nu^{(1)}, \Lambda_{11}, g_2\right)$

Familia de Kotz

- **La familia de Kotz** está caracterizada por la función

$$g(u) = C_n u^{N-1} \exp\left(-ru^s\right) \qquad r, s > 0 \qquad 2N + n > 2,$$

y C_n es la constante de normalización.

Observación 6

La densidad está dada por

$$C_n |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \left[(\mathbf{x} - \nu)^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \nu)\right]^{N-1} \exp\left\{-r\left[(x - \nu)^T \Lambda^{-1} (x - \nu)\right]^s\right\}$$

- Si $N = 1$, $s = 1$ y $r = .5$ obtenemos la distribución normal multivariada

- Familia útil cuando el supuesto de normalidad no es aplicable

Familia de Pearson del tipo VII

- **La familia de Pearson del tipo VII** está caracterizada por la función

$$g(u) = C_n \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-N} \qquad m > 0 \qquad N > \frac{n}{2},$$

y C_n es la constante de normalización.

Observación 7

1. Si $N = (n+m)/2$ recuperamos la distribución t-multivariada
2. Si $m = 1$ y $N = (n+1)/2$ recuperamos la distribución Cauchy multivariada

Distribución t multivariada

Distribución t multivariada

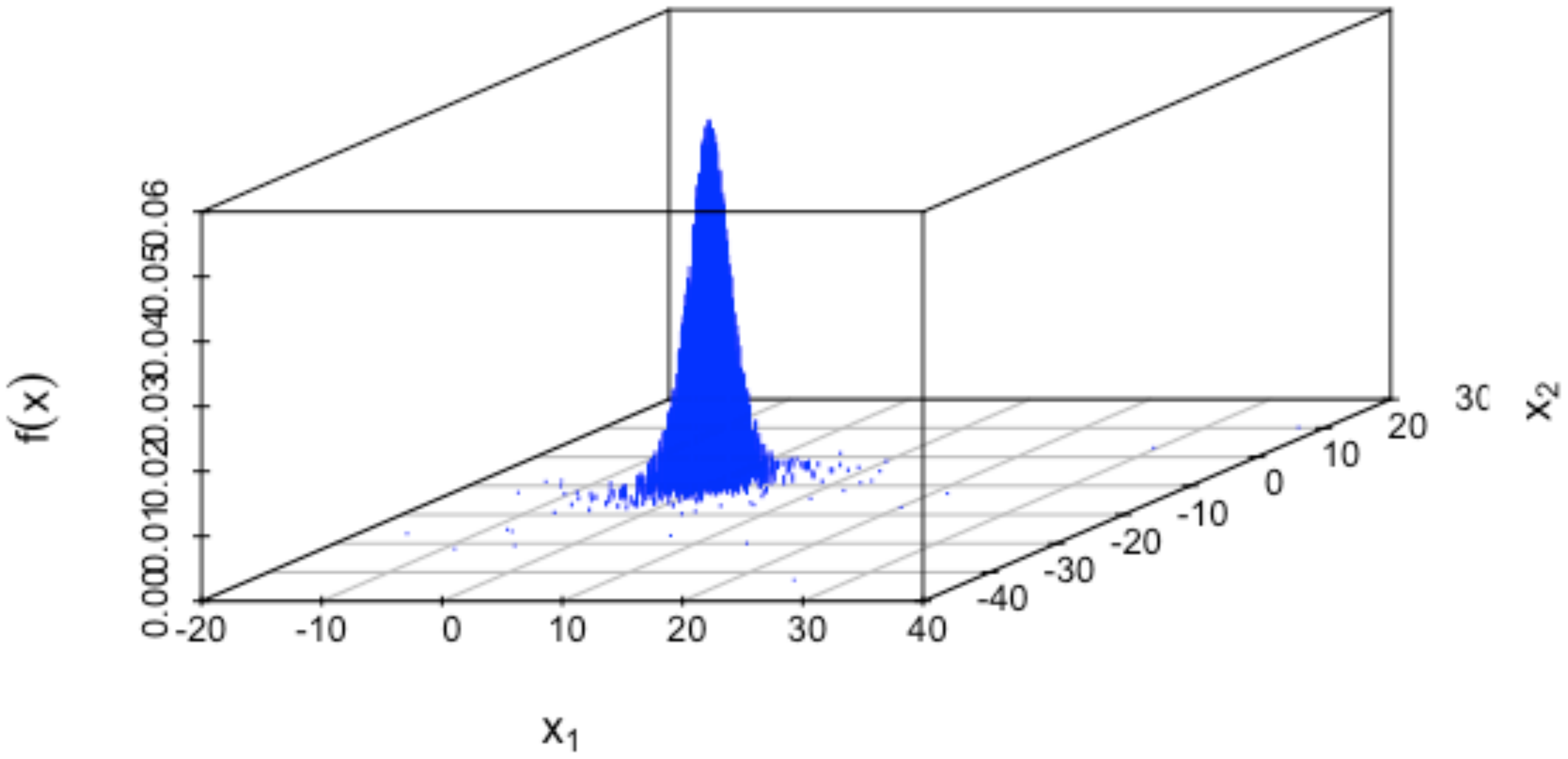
Definición 8

Se dice que $\mathbf{x}$ sigue una distribución t multivariada, denotado por $\mathbf{x} \sim Mt_n(m, \nu, \Lambda)$ si su densidad está dada por

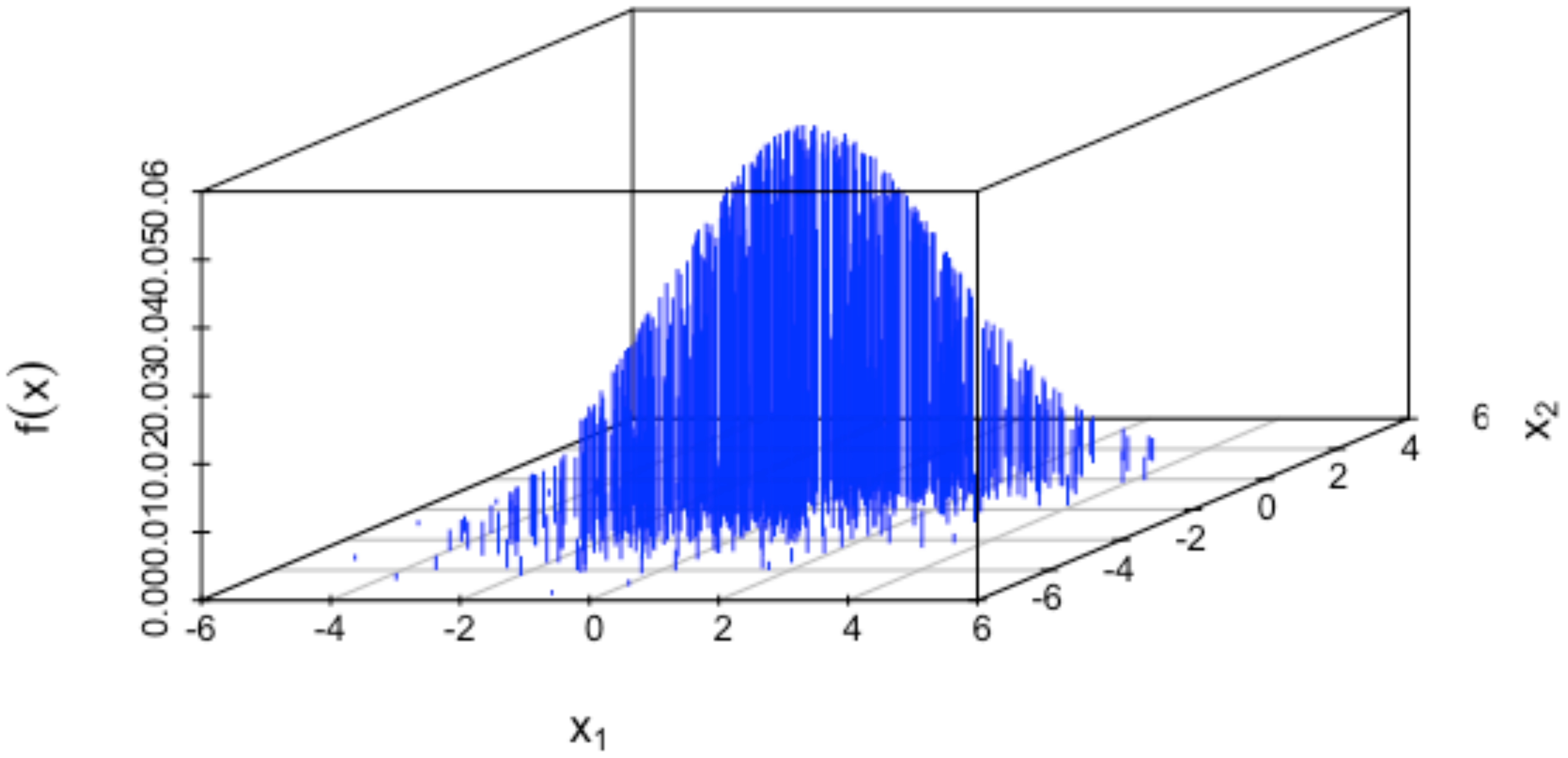
$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{(\pi m)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + m^{-1}(\mathbf{x} - \nu)^T \Lambda^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)^{-\frac{n+m}{2}}$$

- En **R** podemos usar la librería mvtnorm (por default en escala logarítmica)

Simulaciones

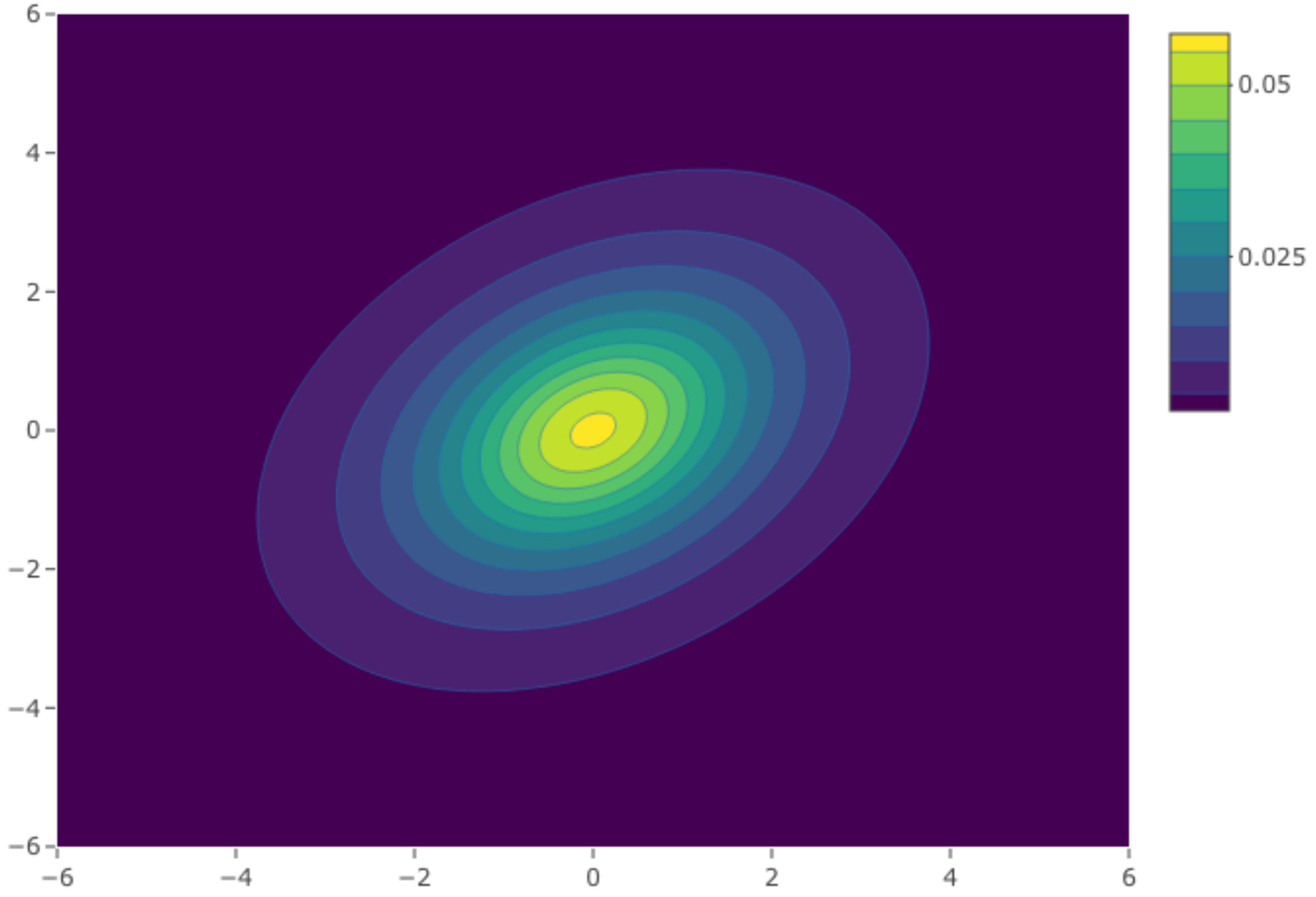


t multivariada

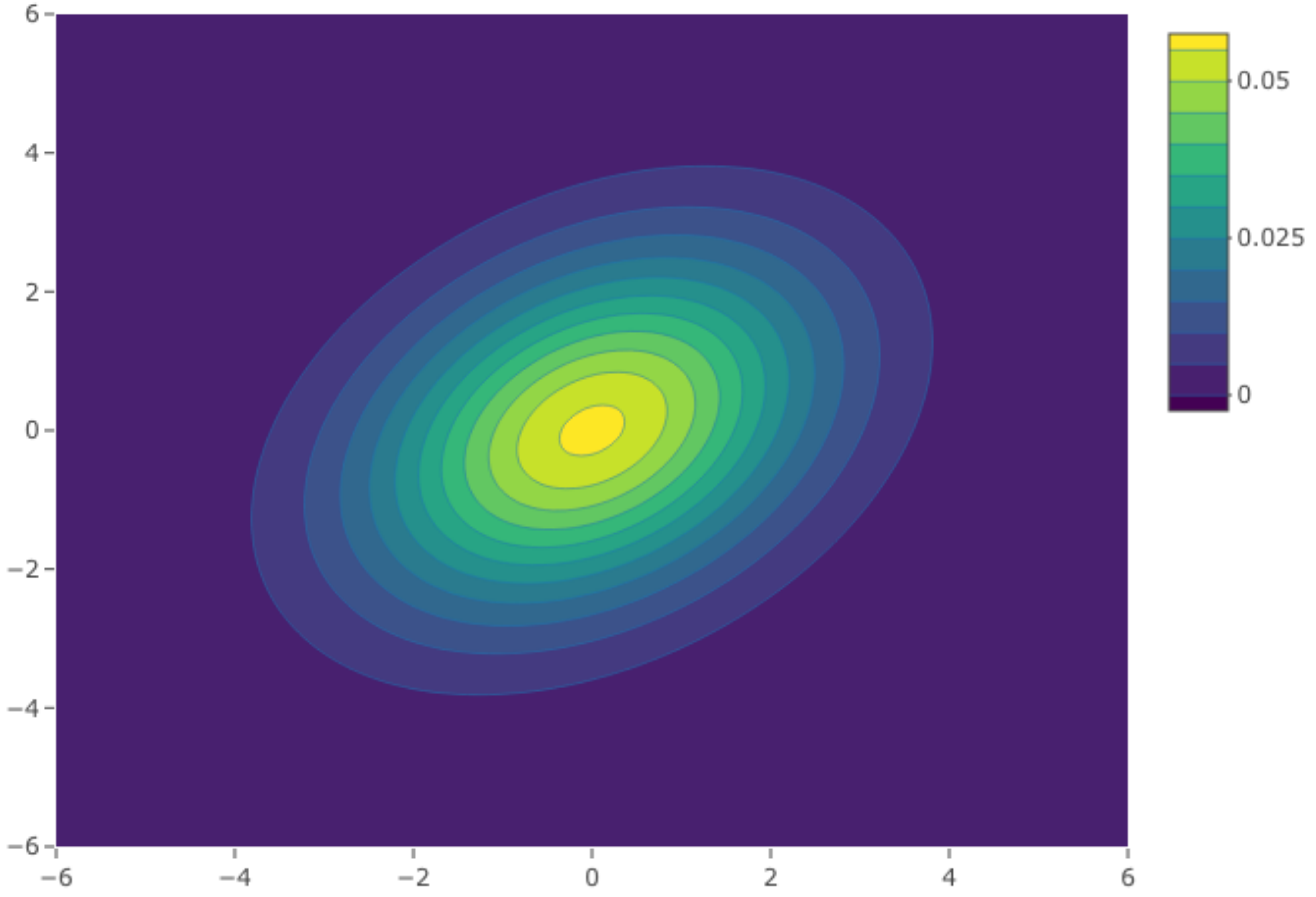


Normal multivariada

Curvas de nivel



t multivariada



Normal multivariada

Distribución Cauchy multivariada

Distribución Cauchy multivariada

Definición 9

Se dice que $\mathbf{x}$ sigue una distribución Cauchy multivariada, denotado por $\mathbf{x} \sim MC_n(\nu, \Lambda)$ si su densidad está dada por

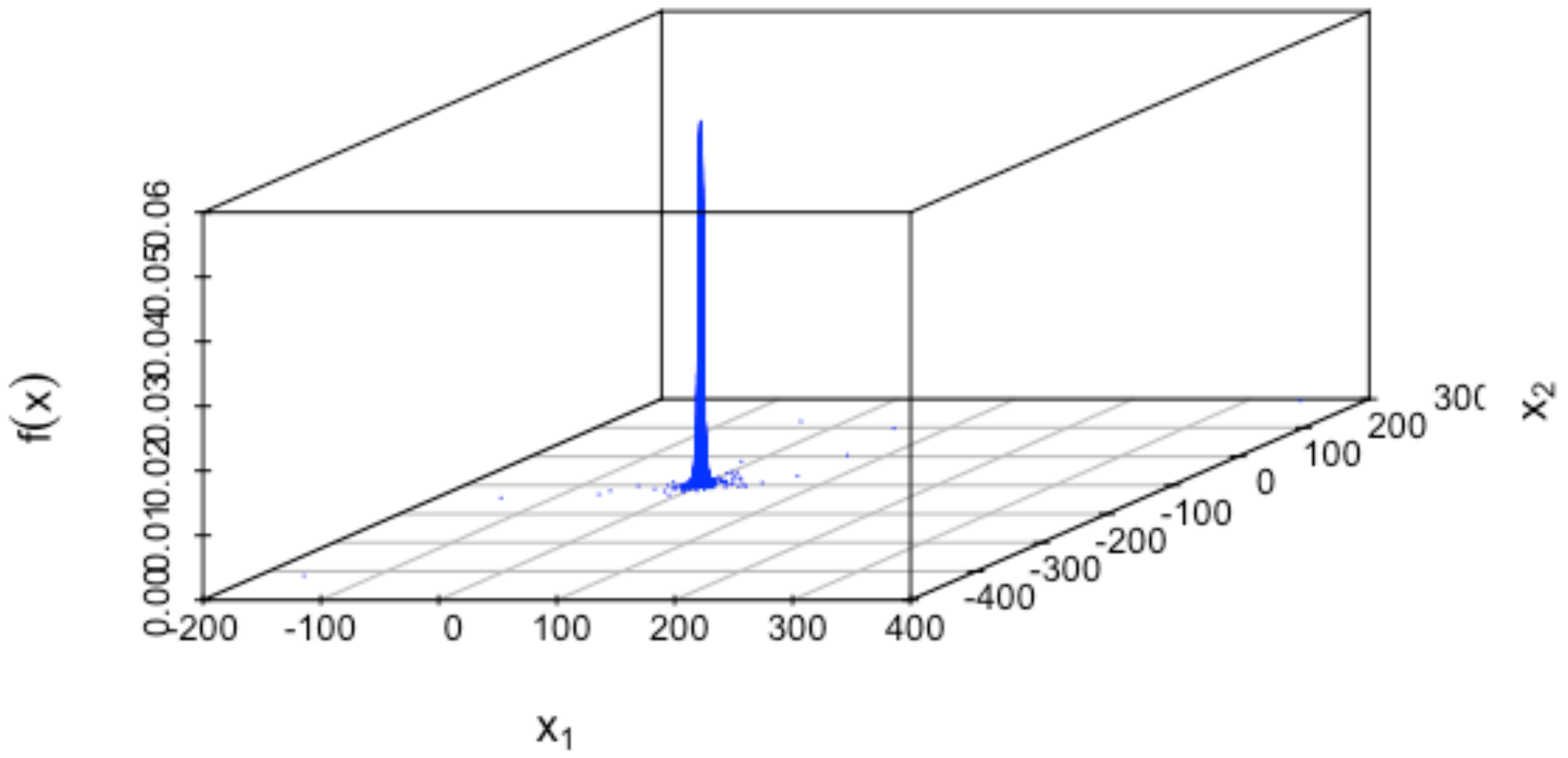
$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \,|\,\Lambda\,|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + (\mathbf{x} - \nu)^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Observación 8

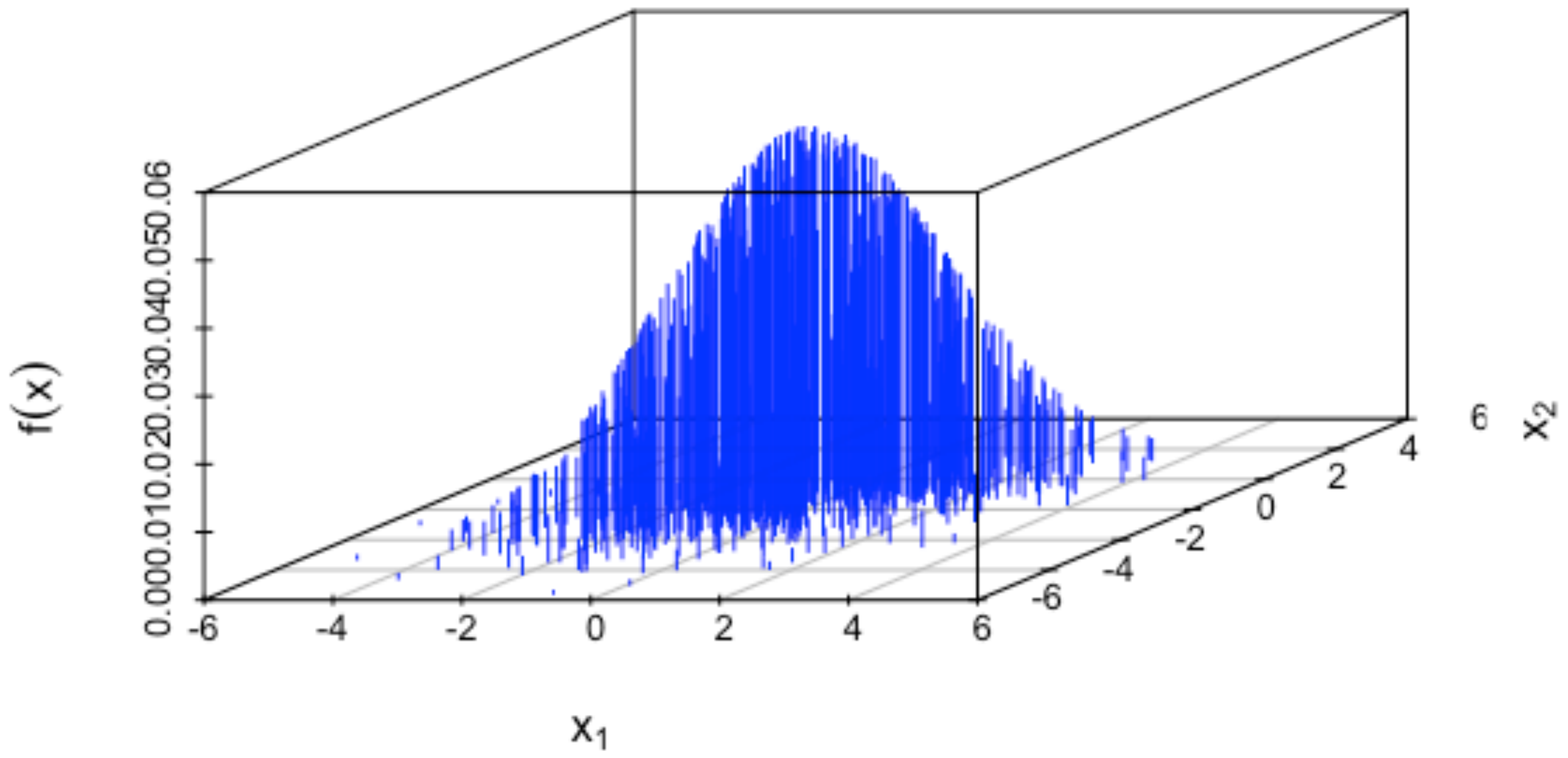
Si $\nu = 0$ y $\Sigma = \mathbf{I}$ se recupera la distribución Cauchy multivariada estándar, $\mathbf{x} \sim MC_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, con densidad dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left(1 + \mathbf{x}^T \mathbf{x}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Simulaciones

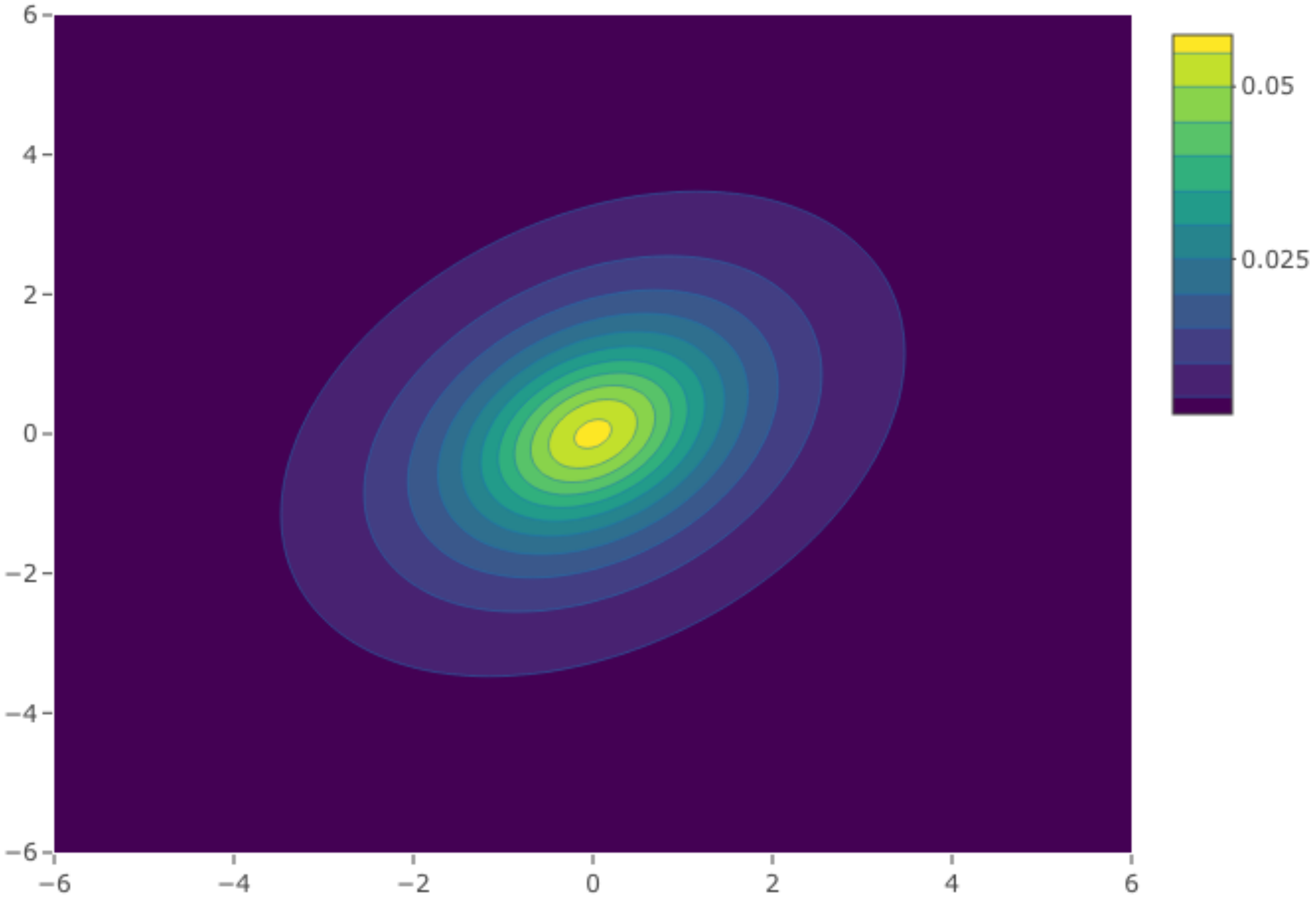


Cauchy multivariada

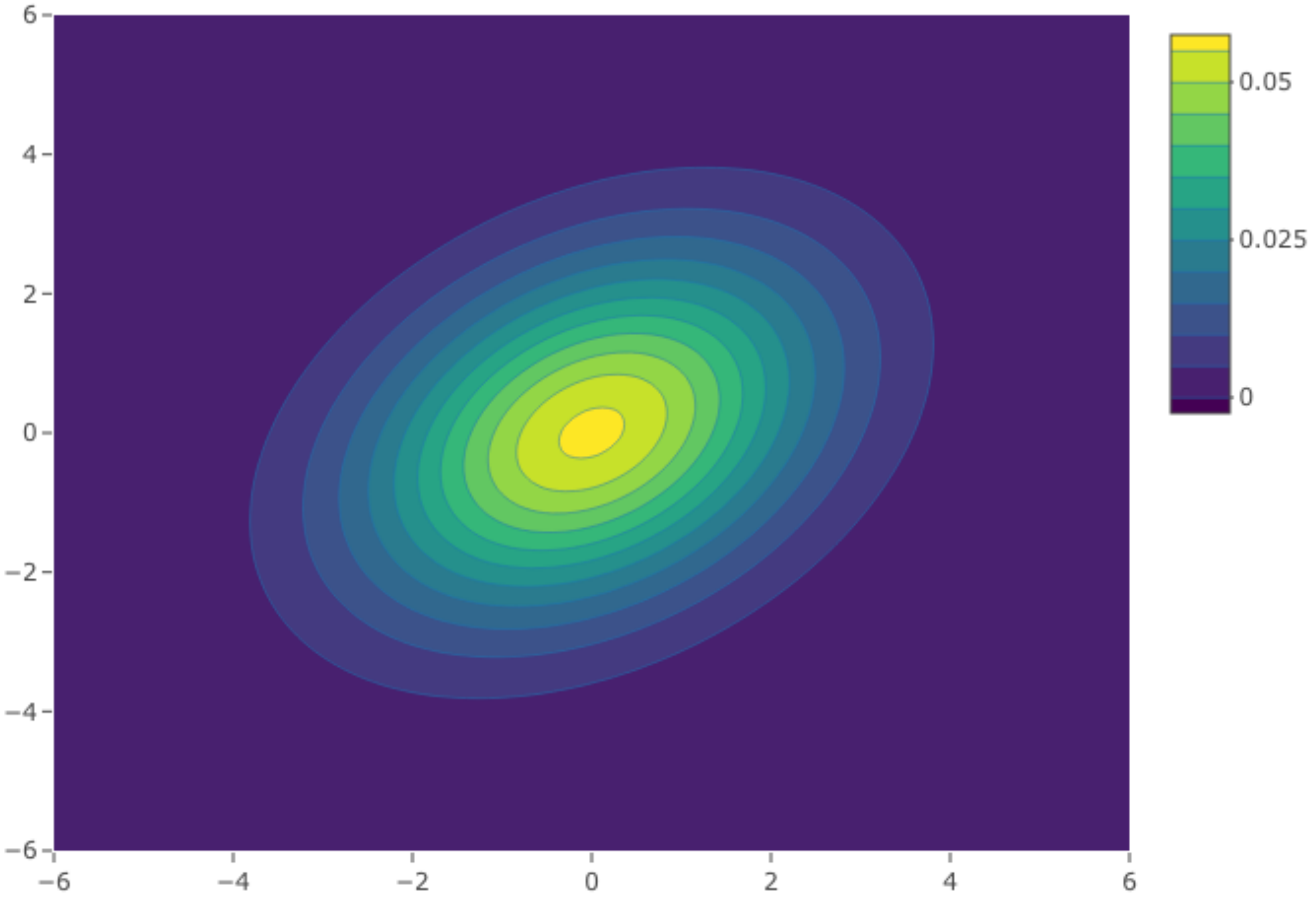


Normal multivariada

Curvas de nivel



Cauchy multivariada



Normal multivariada

Distribución Dirichlet

Distribución Dirichlet

Definición 9

Se dice que $\mathbf{x}$ sigue una distribución Dirichlet, denotado por $\mathbf{x} \sim Dir(\alpha)$ si su densidad está dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^{p} \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^{p} x_i^{\alpha_i - 1}$$

donde $\alpha_i > 0$ para toda i

- Distribución continua y generalización de la distribución beta
- Soporte en el simplex (p-1)-dimensional

$$\left\{ \mathbf{x} \in [0,1]^p : \sum_i x_i = 1 \right\}$$

Construcción

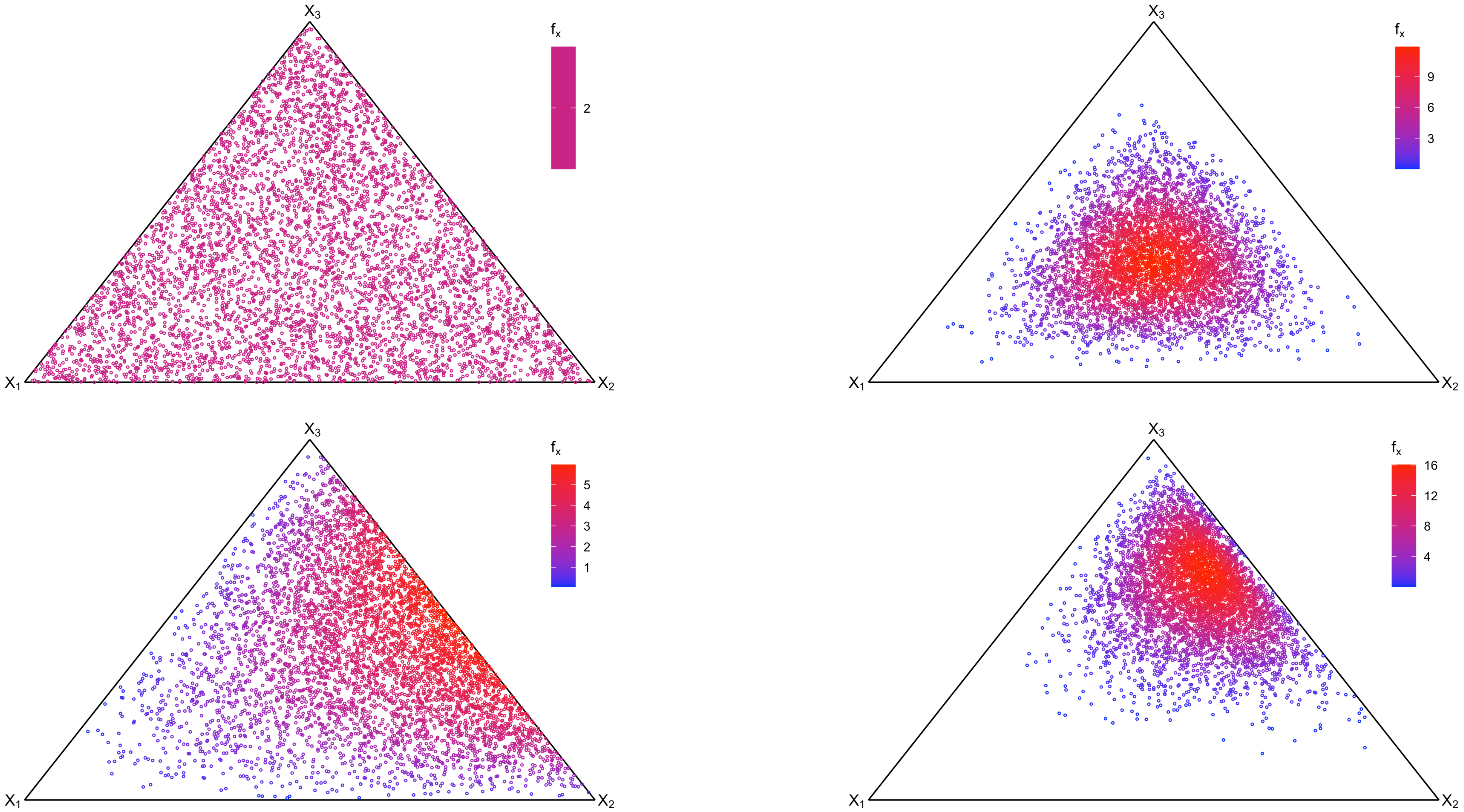
Proposición 6

Sean $y_i \sim Ga(\alpha_i, \theta)$ una colección de variables aleatorias independientes entonces $V = \sum_i y_i \sim Ga(\alpha_0, \theta)$ y

$$(x_1, \ldots, x_p) = \left(\frac{y_1}{V}, \ldots, \frac{y_p}{V}\right) \sim Dir(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$$

donde $\alpha_0 = \sum_i \alpha_i$

Simulaciones y curvas de nivel



Distribución multinomial

Distribución multinomial

Definición 9

Se dice que $\mathbf{x}$ sigue una distribución multinomial, denotado por $\mathbf{x} \sim Multinomial(\alpha, N)$ si su densidad está dada por

$$\mathbb{P}(\mathbf{x} = \mathbf{n}) = \frac{N!}{n_1! \cdots n_p!} \prod_{i=1}^{p} \alpha_i^{n_i}$$

donde $N \in \mathbb{N}, \alpha_i \in (0,1)$, y $\sum \alpha_i = 1$

- Distribución discreta y generalización de la distribución binomial
- Soporte

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{N}^p : \sum_i x_i = N \right\}$$