

Otras distribuciones multivariadas



José A. Perusquía Cortés
Análisis Multivariado Semestre 2024-I



Distribuciones elípticas y esféricas

- Definición

Un conjunto no vacío, G , de transformaciones de \mathcal{X} en si mismo se dice que es un grupo si satisface

1. Dados $g_1, g_2 \in G$ entonces, $g_1g_2 \in G$
2. Dados $g_1, g_2, g_3 \in G$, entonces $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$
3. Existe una transformación identidad, $e \in G$, tal que $eg = ge = g$
4. Para todo $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

- Definición

Dos puntos $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ son equivalentes con respecto a G si existe $g \in G$ tal que $x_2 = gx_1$, denotado como $x_1 \sim x_2 \pmod{G}$ y forma una relación de equivalencia.

- Definición

Una función, $f(x)$, es invariante con respecto a G si se cumple que $f(gx) = f(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$ y para toda $g \in G$

- Definición

Una función, $f(x)$, es invariante maximal con respecto a G si

- f es invariante
- $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 \sim x_2 \pmod{G}$

- Teorema

Sea $f(x)$ una función que es invariante maximal con respecto a G , entonces $h(x)$ es invariante con respecto a G , si y solo si, h es función de f

- Observación

Si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ y se considera al grupo de matrices ortogonales, $G = \mathcal{O}(n)$, entonces $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ es una función invariante maximal

- Definición

Un vector aleatorio \mathbf{y} tiene una distribución esférica si para toda $\mathbf{O} \in \mathbb{O}(n)$ se tiene que $\mathbf{y} \stackrel{d}{=} \mathbf{O}\mathbf{y}$

- Teorema

Un vector aleatorio \mathbf{y} tiene una distribución esférica, si y solo si, su función característica $\phi_{\mathbf{y}}(t)$, satisface alguna de estas condiciones equivalentes

1. $\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{O}t) = \phi_{\mathbf{y}}(t)$ para toda $\mathbf{O} \in \mathbb{O}(n)$
2. Existe una función escalar (generador característico) $\varphi(\cdot)$, tal que $\phi_{\mathbf{y}}(t) = \varphi(t^T t)$

- Proposición

Sea un vector aleatorio $\mathbf{y} \sim S_n(\phi)$ entonces, $\mathbf{y} \stackrel{d}{=} r\mathbf{u}^{(n)}$, donde r es una variable positiva y $\mathbf{u}^{(n)}$ es un vector que se distribuye uniformemente en la esfera unitaria en \mathbb{R}^n independiente de r

- Definición

Decimos que el vector aleatorio \mathbf{x} tiene una distribución elíptica con parámetros ν y Λ , denotado por $\mathbf{x} \sim EC_n(\nu, \Lambda, \phi)$, si

$$\mathbf{x} \stackrel{d}{=} \nu + \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \sim S_k(\phi)$$

donde $\mathbf{A}_{k \times n}$ es una matriz tal que $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \Lambda$ y donde $\text{ran}(\Lambda) = k$

- Observación

Una condición necesaria para que exista la densidad es que $\text{ran}(\Lambda) = n$

- Definición

Decimos que el vector aleatorio \mathbf{x} tiene una distribución elíptica, denotado por $\mathbf{x} \sim EC(\nu, \Lambda, g)$, si su densidad está dada por

$$|\Lambda|^{-\frac{1}{2}} g [(\mathbf{x} - \nu)^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \nu)],$$

donde $\Lambda > 0$, $g(\cdot) \geq 0$ y $\int g(\mathbf{y}^T \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$.

- Observación

Si \mathbf{C} es una matriz no singular tal que $\mathbf{C}^T \Lambda^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{I}$, y considerando la transformación $\mathbf{x} - \nu = \mathbf{C}\mathbf{y}$, entonces el vector aleatorio \mathbf{y} tiene densidad,

$$g(\mathbf{y}^T \mathbf{y})$$

- Observación

Una densidad esférica puede representarse en coordenadas polares mediante la transformación

$$y_1 = r \sin(\theta_1)$$

$$y_2 = r \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

$$y_3 = r \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin(\theta_3)$$

$$\vdots$$

$$y_{p-1} = r \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cdots \cos(\theta_{p-2}) \sin(\theta_{p-1})$$

$$y_p = r \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cdots \cos(\theta_{p-2}) \cos(\theta_{p-1})$$

- Donde

▸ Para $i \in 1, \dots, p - 2$ se tiene que $-\frac{\pi}{2} < \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$ y $-\pi < \theta_{p-1} \leq \pi$

▸ $0 \leq r < \infty$

- Proposición

La densidad de $(R, \Theta_1, \dots, \Theta_{p-1})$ es

$$r^{p-1} \cos(\theta_1)^{p-2} \cos(\theta_2)^{p-3} \dots \cos(\theta_{p-2}) g(r^2)$$

- Observación

Las variables aleatorias $R, \Theta_1, \dots, \Theta_{p-1}$ son independientes

- Proposición

La distribución marginal de R es

$$\frac{2\pi^{\frac{p}{2}} r^{p-1} g(r^2)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$$

- Proposición

La distribución marginal de Θ_i para $i \in 1, \dots, p-2$ está dada por

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p-i}{2}\right) \cos(\theta_i)^{p-i-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-i-1}{2}\right)}$$

y Θ_{p-1} es una variable aleatoria uniforme, con densidad,

$$\frac{1}{2\pi}$$

- Proposición

Sea $\mathbf{x} \sim EC_n(\nu, \Lambda, g)$ entonces,

1. $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \nu$

2. $\text{Var}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbb{E}(r^2)\Lambda}{n}$

3. $\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mu \sim EC_n(\mu + \mathbf{D}^T\nu, \mathbf{D}^T\Lambda\mathbf{D}, g_1)$

4. Si consideramos la partición

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \nu = \begin{pmatrix} \nu^{(1)} \\ \nu^{(2)} \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$$

entonces, $\mathbf{x}^{(1)} \sim EC_n(\nu^{(1)}, \Lambda_{11}, g_2)$

- **La familia de Kotz** está caracterizada por la función

$$g(u) = C_n u^{N-1} \exp(-ru^s) \quad r, s > 0 \quad 2N + n > 2,$$

y C_n es la constante de normalización.

- Observación

La densidad está dada por

$$C_n |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \left[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu}) \right]^{N-1} \exp \left\{ -r \left[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu}) \right]^s \right\}$$

- Si $N = 1$, $s = 1$ y $r = .5$ obtenemos la distribución normal multivariada
- Familia útil cuando el supuesto de normalidad no es aplicable

- **La familia de Pearson del tipo VII** está caracterizada por la función

$$g(u) = C_n \left(1 + \frac{u}{m} \right)^{-N} \quad m > 0 \quad N > \frac{n}{2},$$

y C_n es la constante de normalización.

- **Observación**

- Si $N = (n + m)/2$ recuperamos la distribución t-multivariada
- Si $m = 1$ y $N = (n + 1)/2$ recuperamos la distribución Cauchy multivariada

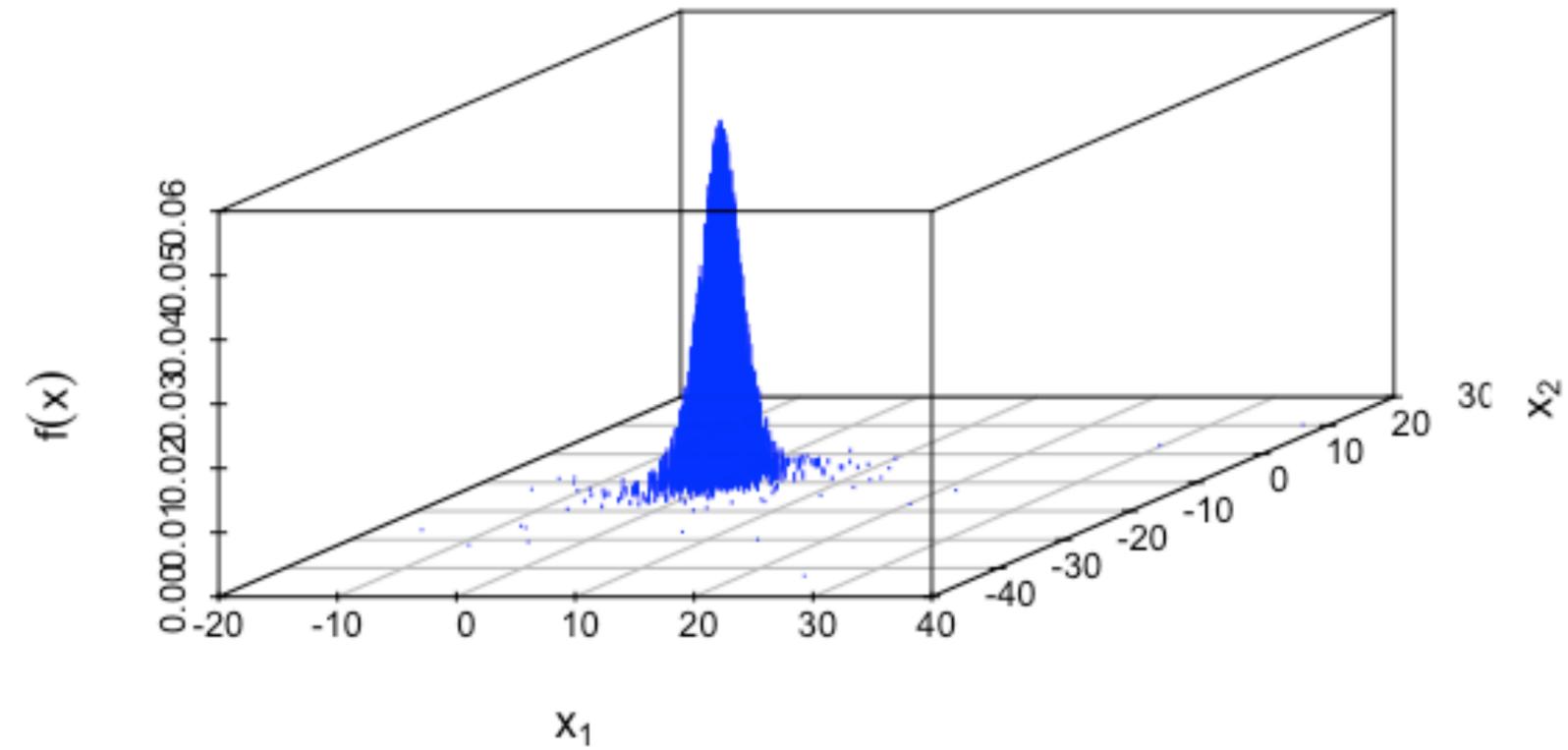
Distribución t multivariada

Denotado por $\mathbf{x} \sim Mt_n(m, \nu, \Lambda)$ y con densidad

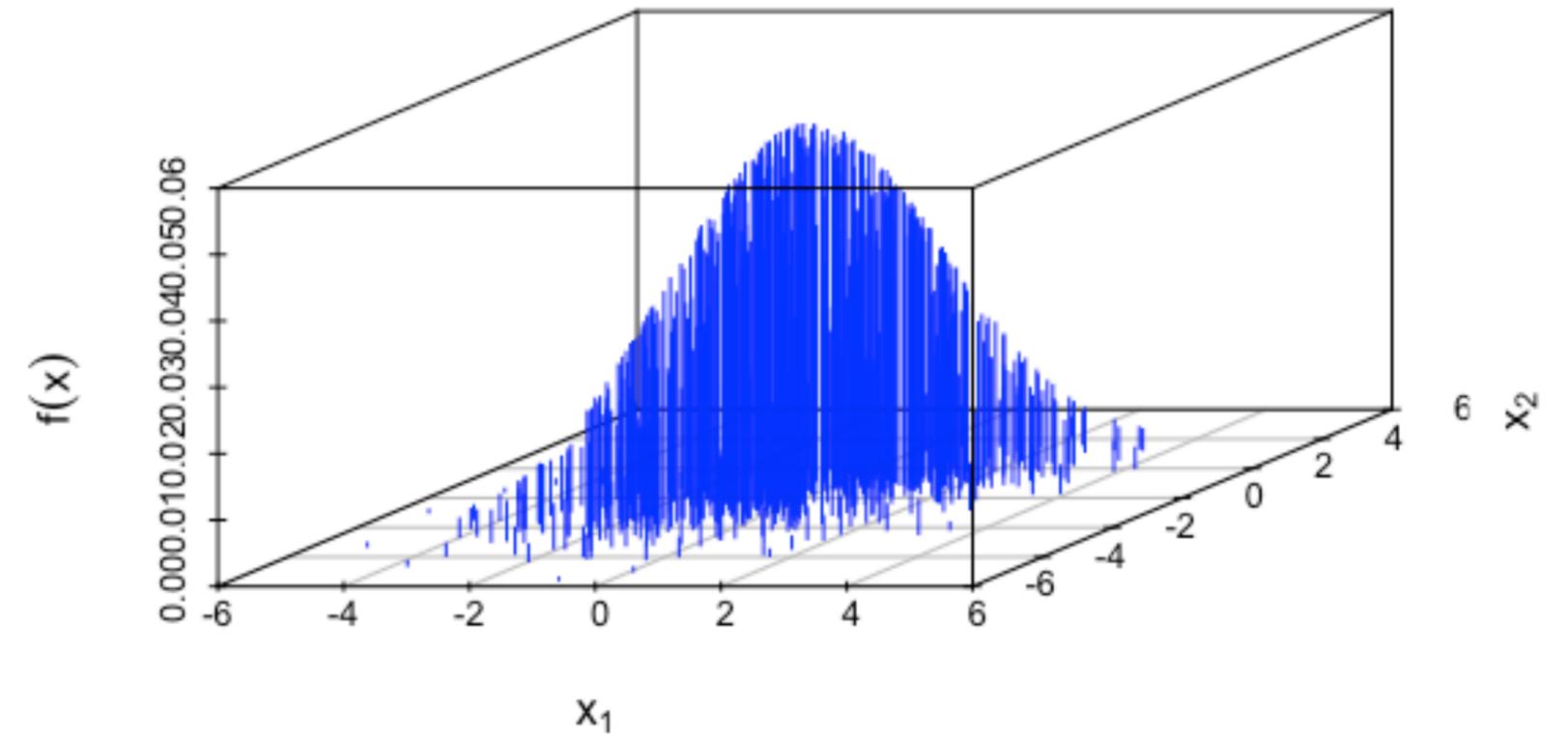
$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{(\pi m)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + m^{-1}(\mathbf{x} - \nu)^T \Lambda^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)^{-\frac{n+m}{2}}$$

- En **R** podemos usar la librería `mvtnorm` (por default en escala logarítmica)

Distribución t-multivariada

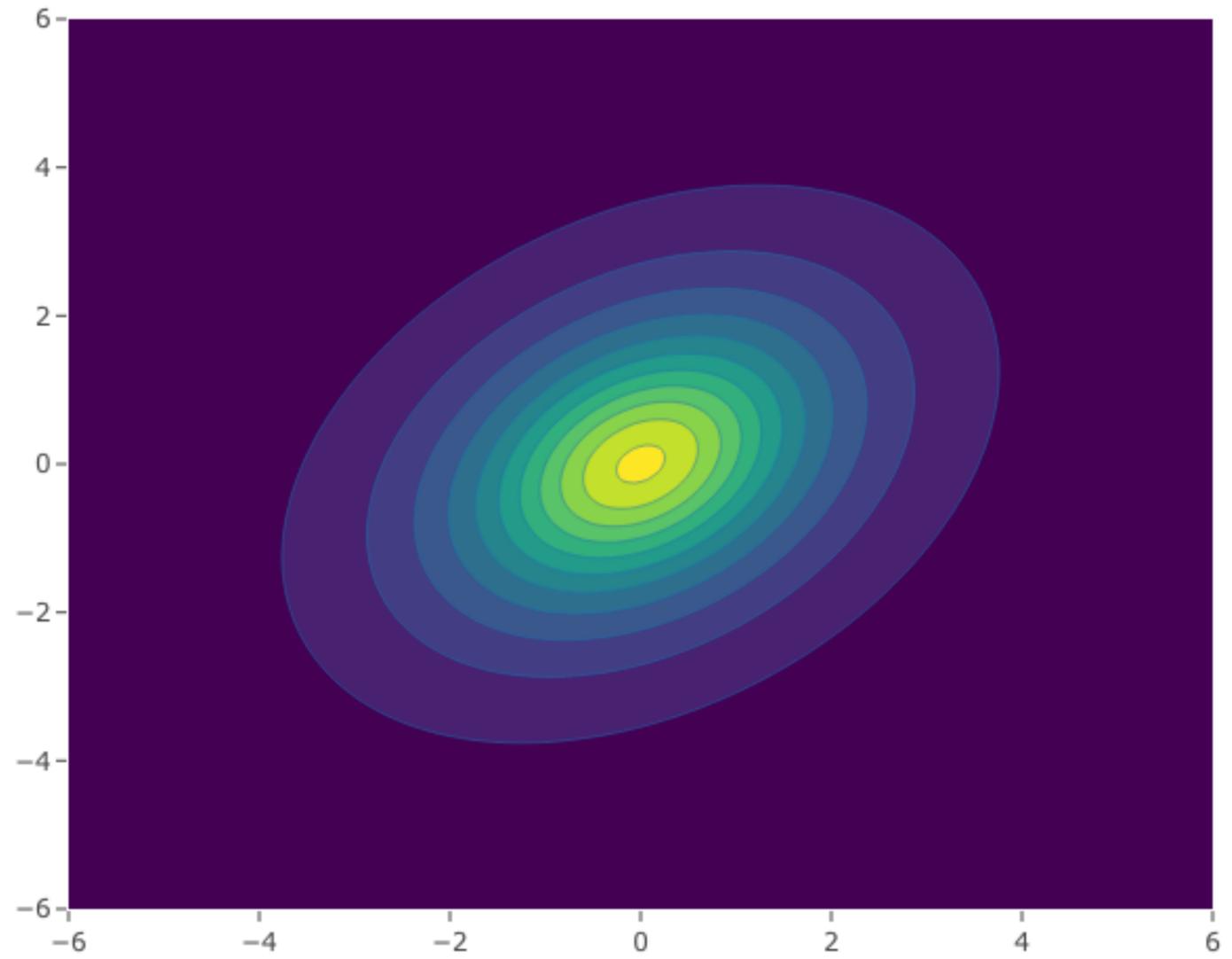


t multivariada

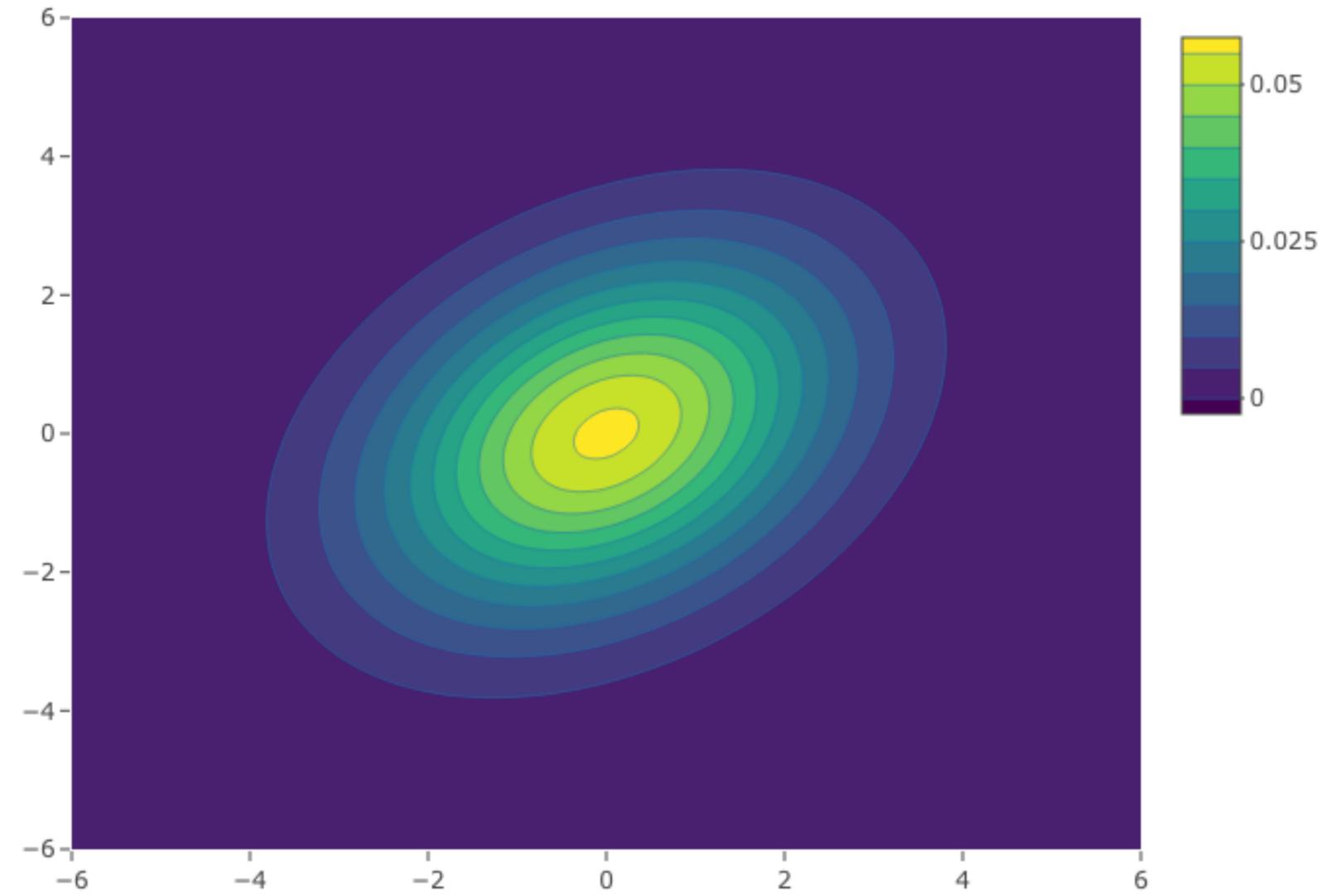


Normal multivariada

Distribución t-multivariada



t multivariada



Normal multivariada

Distribución Cauchy multivariada

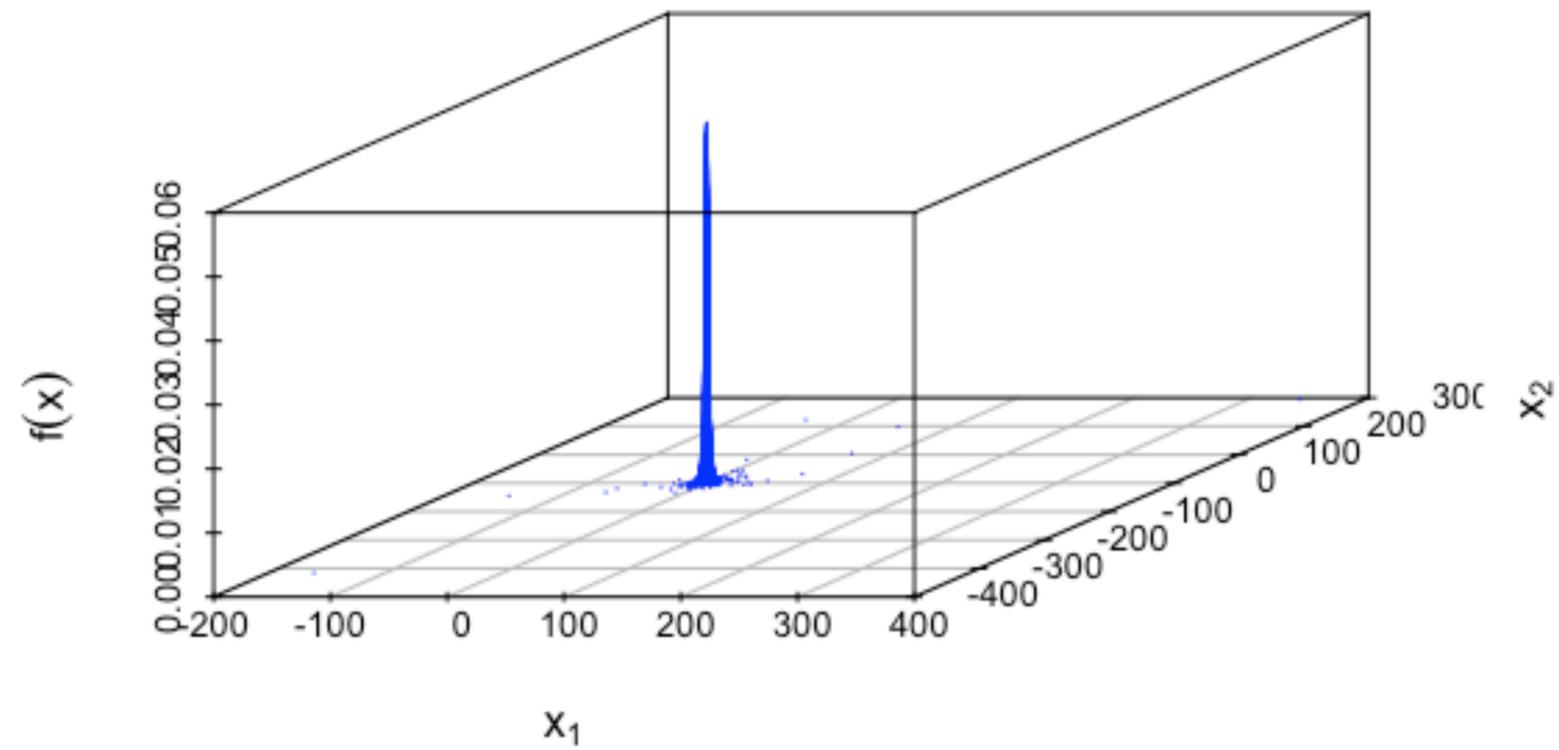
- Denotado por $\mathbf{x} \sim MC_n(\boldsymbol{\nu}, \Lambda)$ y con densidad

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

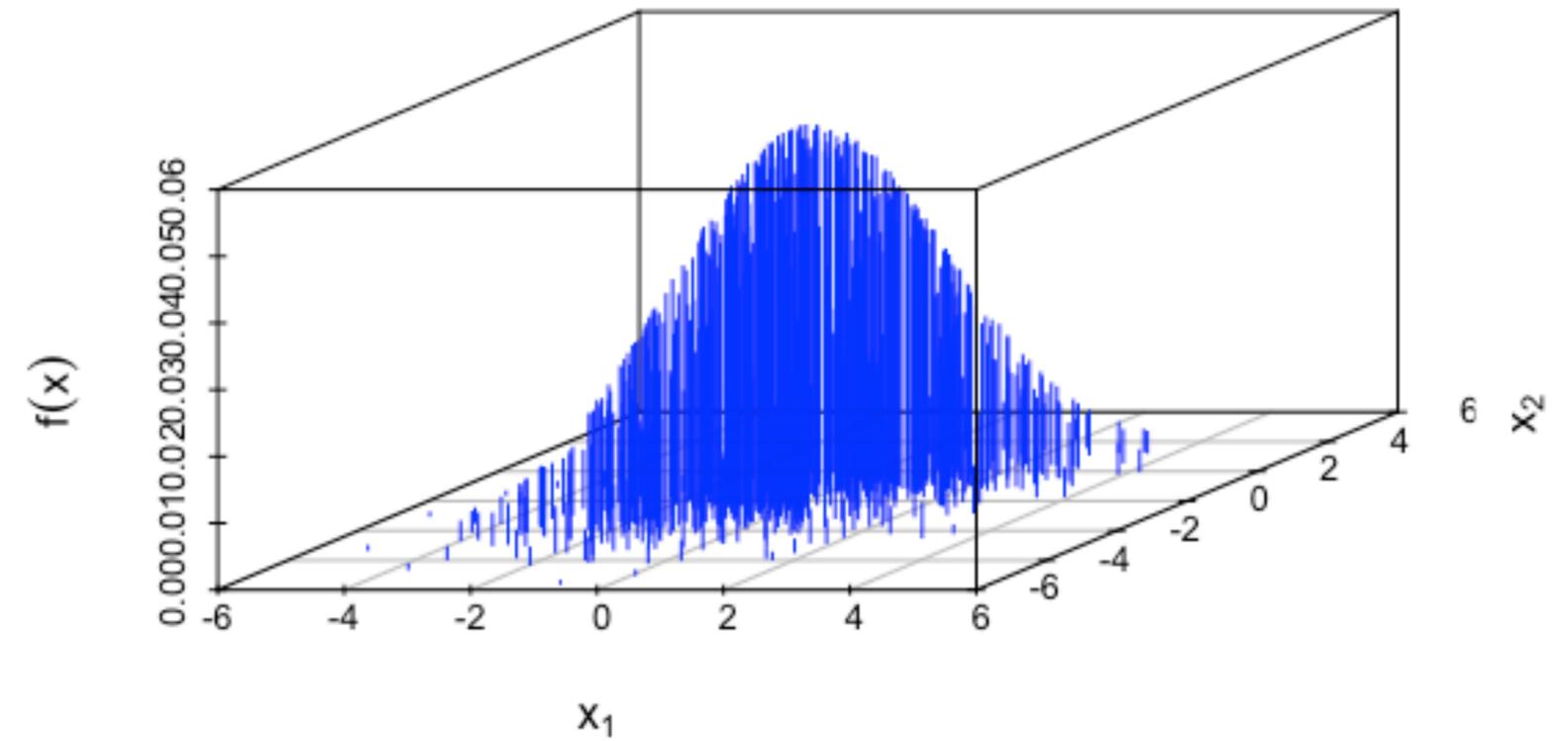
- El caso particular $\mathbf{x} \sim MC_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left(1 + \mathbf{x}^T \mathbf{x}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Distribución Cauchy multivariada

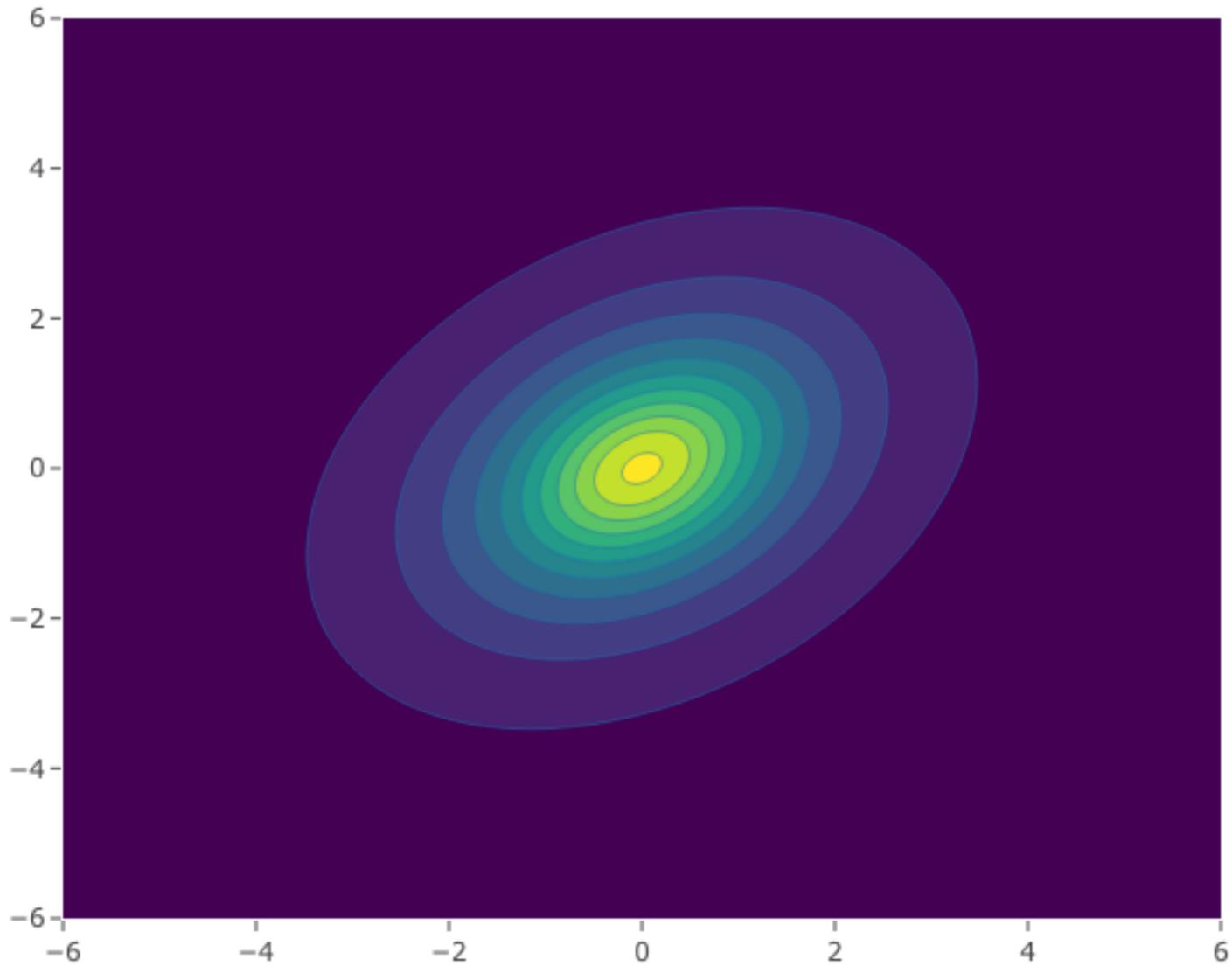


Cauchy multivariada

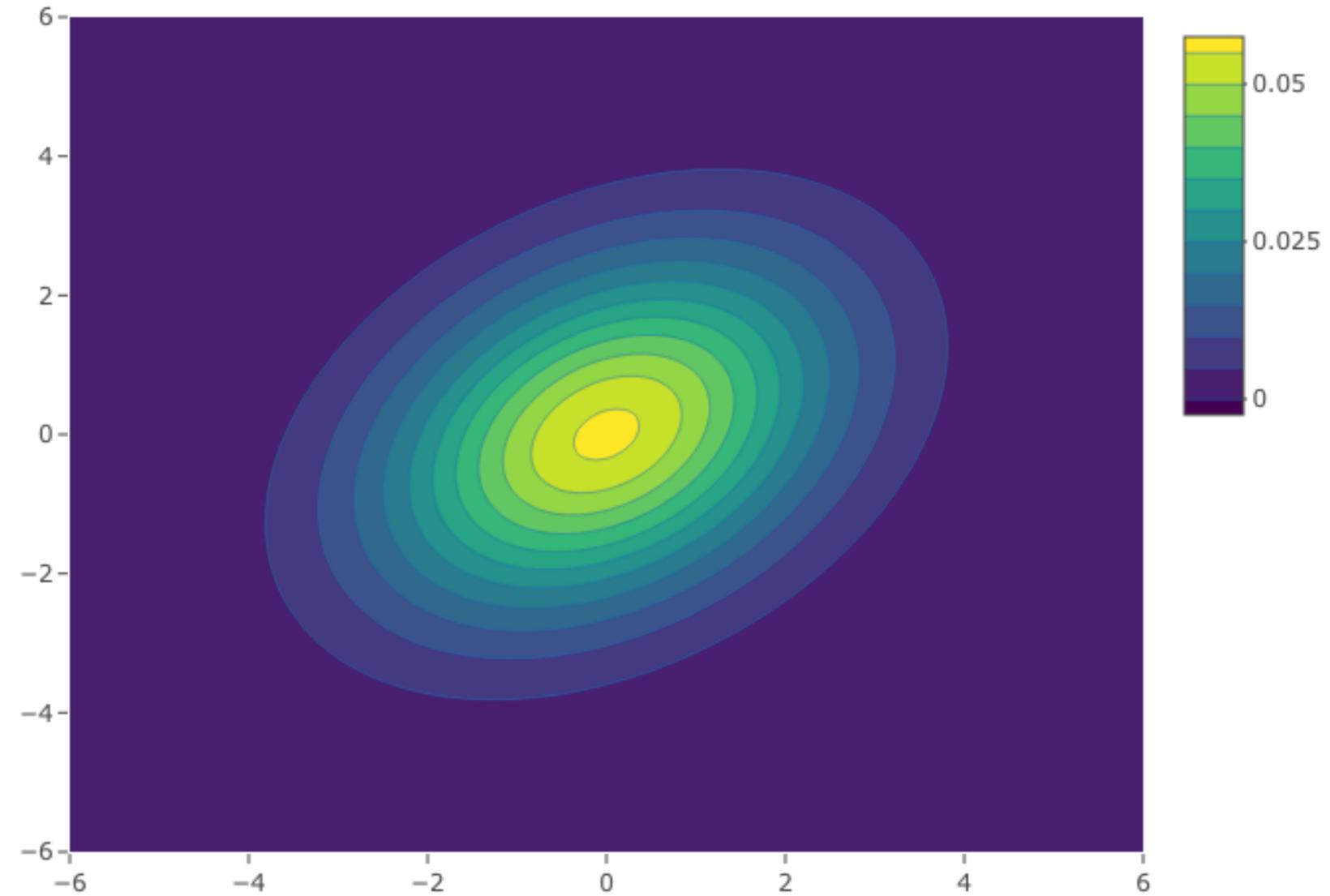


Normal multivariada

Distribución Cauchy multivariada



Cauchy multivariada



Normal multivariada

Distribución Dirichlet

- Distribución continua y generalización de la distribución beta
- Soporte en el simplex $(p-1)$ -dimensional

$$\left\{ \mathbf{x} \in [0,1]^p : \sum_i x_i = 1 \right\}$$

- La densidad está dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^p \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^p x_i^{\alpha_i-1}$$

donde $\alpha_i > 0$ para toda i

- Proposición

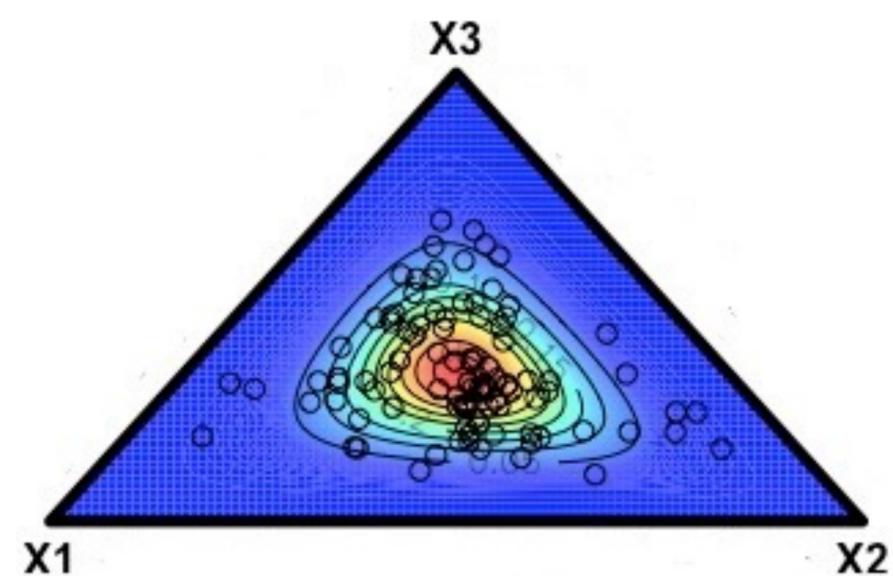
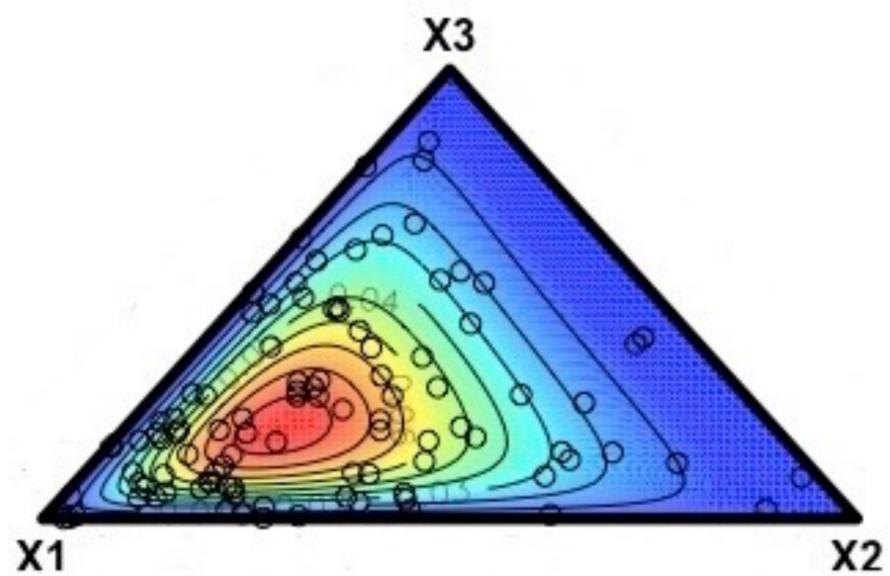
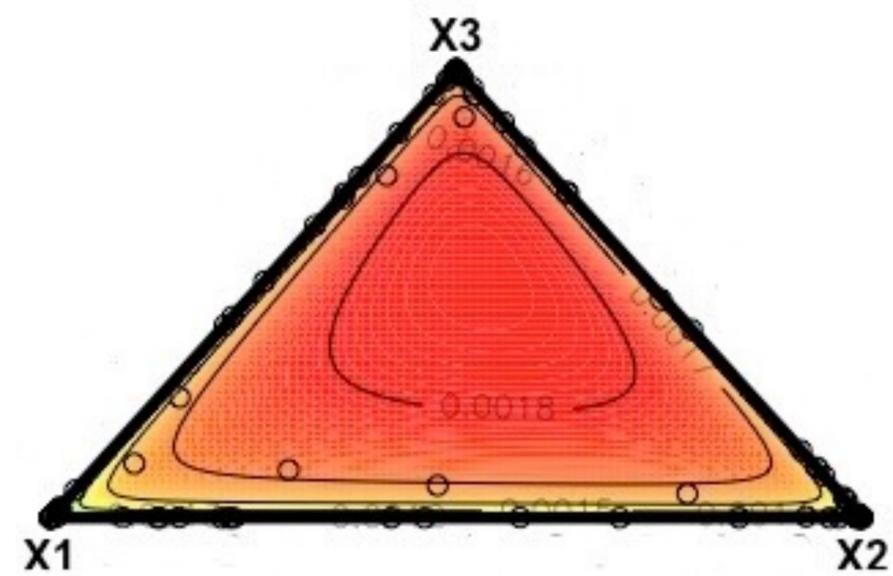
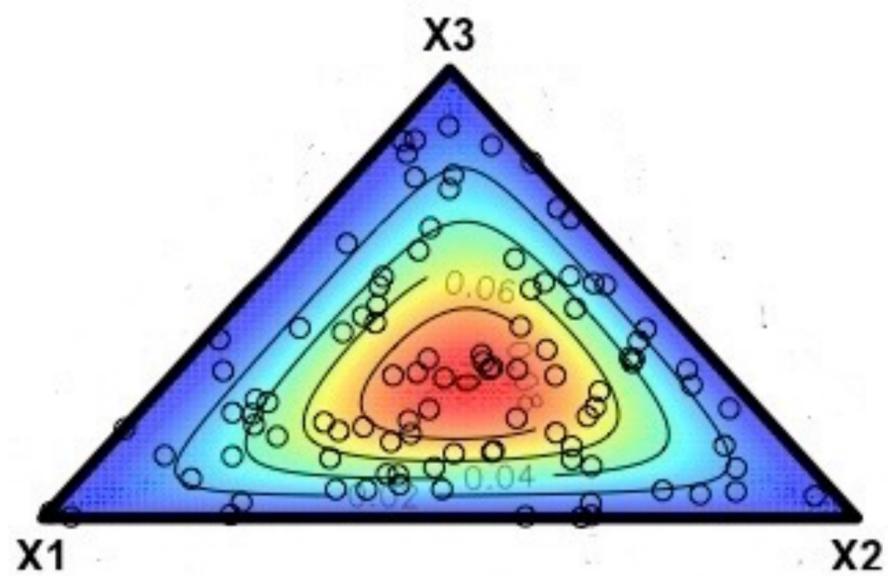
Sean $y_i \sim Ga(\alpha_i, \theta)$ una colección de variables aleatorias independientes entonces

$$V = \sum_i y_i \sim Ga(\alpha_0, \theta) \text{ y}$$

$$(x_1, \dots, x_p) = \left(\frac{y_1}{V}, \dots, \frac{y_p}{V} \right) \sim Dir(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

donde $\alpha_0 = \sum_i \alpha_i$

Distribución Dirichlet



Distribución Multinomial

- Distribución discreta y generalización de la distribución binomial
- Soporte

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{N}^p : \sum_i x_i = N \right\}$$

- Función masa

$$\mathbb{P}(\mathbf{x} = \mathbf{n}) = \frac{N!}{n_1! \cdots n_p!} \prod_{i=1}^p \alpha_i^{n_i}$$

donde $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in (0,1)$ y $\sum_i \alpha_i = 1$