Distribución normal multivariada y distribuciones asociadas

José A. Perusquía Cortés

Análisis Multivariado Semestre 2024 - I

- Decimos que $\mathbf{x} \sim N_p\left(\mu, \Sigma\right)$ (no singular) si tiene función de densidad

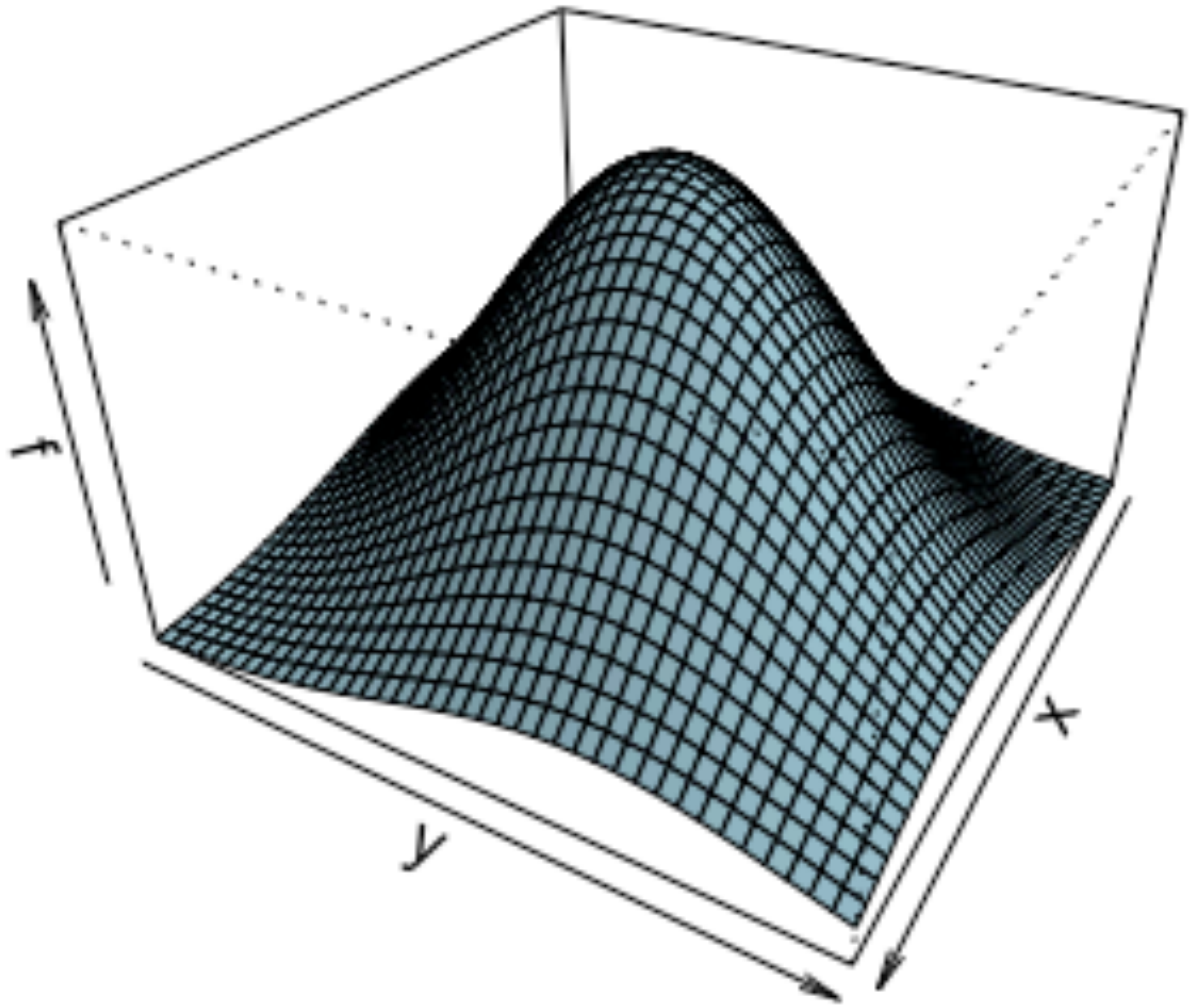
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|2\pi\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right]$$

- Donde
  - $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \mu$
  - $\text{Var}(\mathbf{x}) = \Sigma > 0$ (positiva definida)

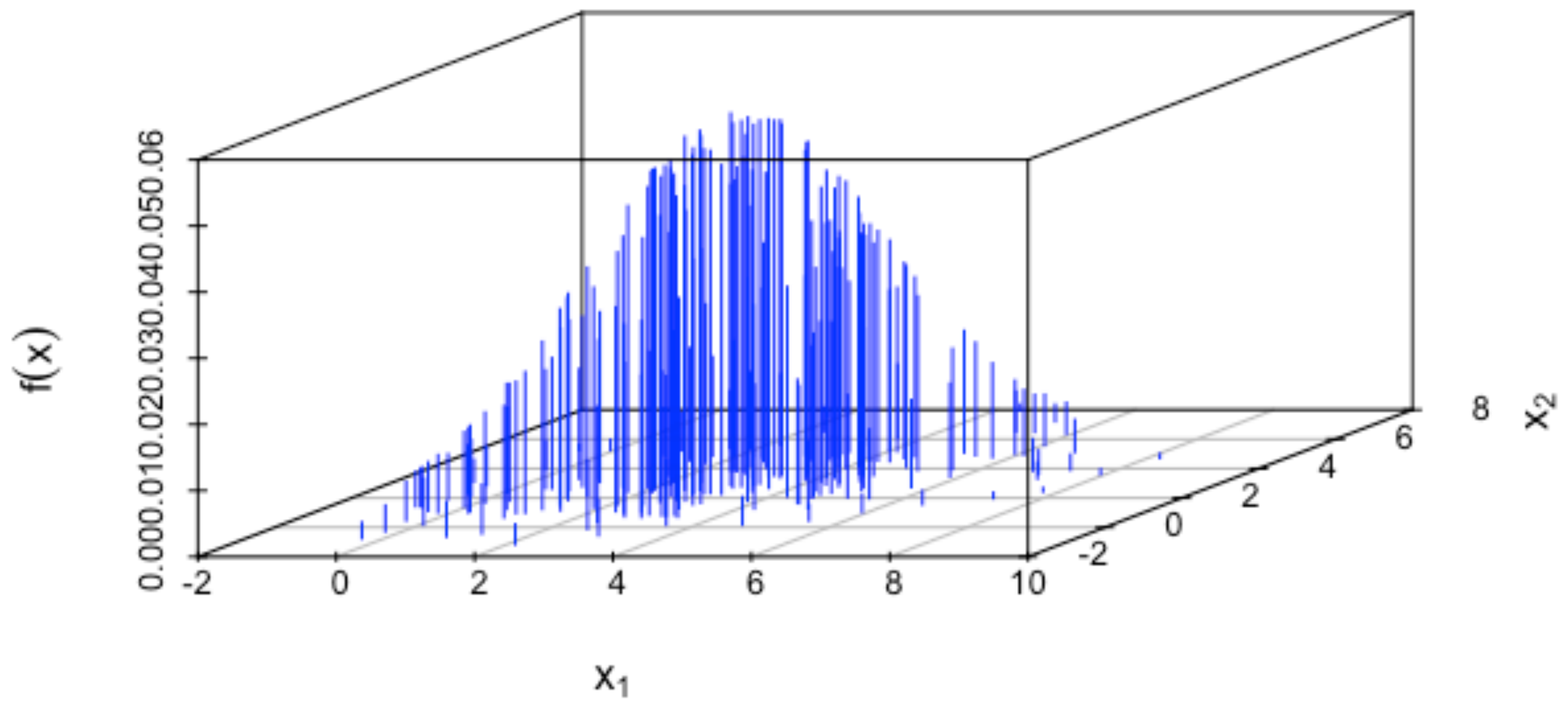
- En **R**: librería mvtnorm

- Por ejemplo, la densidad de un vector normal multivariado con parámetros

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$



- Para datos bivariados también se puede crear un scatterplot en 3D con librería scatterplot3d



- Si $\text{ran}(\Sigma) = k < p$ podemos definir la densidad (singular) como

$$f(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^{-\frac{k}{2}}}{(\lambda_1 \cdots \lambda_k)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-}(\mathbf{x}-\mu)\right]$$

- Donde

  - $\mathbf{x}$ vive en el híper-plano $\mathbf{N}'(\mathbf{x}-\mu)$ y $\mathbf{N}$ es una matriz de tamaño $p \times (p-k)$ tal que:

    1. $\mathbf{N}^T\Sigma = \mathbf{0}$
    2. $\mathbf{N}^T\mathbf{N} = \mathbf{I_{p-k}}$

  - Σ^{-} es la inversa generalizada y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son los eigenvalores diferentes de cero.

- **Definición**

Decimos que $\mathbf{x}$ tiene una distribución normal p-variada si y solo si $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ tiene una distribución normal univariada para todos los vectores p-variados (no triviales) $\mathbf{a}$

- **Proposición**

Sea $\mathbf{x}$ un vector normal p-variado y definamos a $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ donde $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión $q \times p$. Entonces $\mathbf{y}$ tiene una distribución normal q-variada tal que:

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mu + \mathbf{b} \qquad \mathrm{Var}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

- **Corolario**

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$ y definamos a $\mathbf{y} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{x} + \mu$, entonces, $\mathbf{y} \sim N_p(\mu, \Sigma)$

- **Corolario**

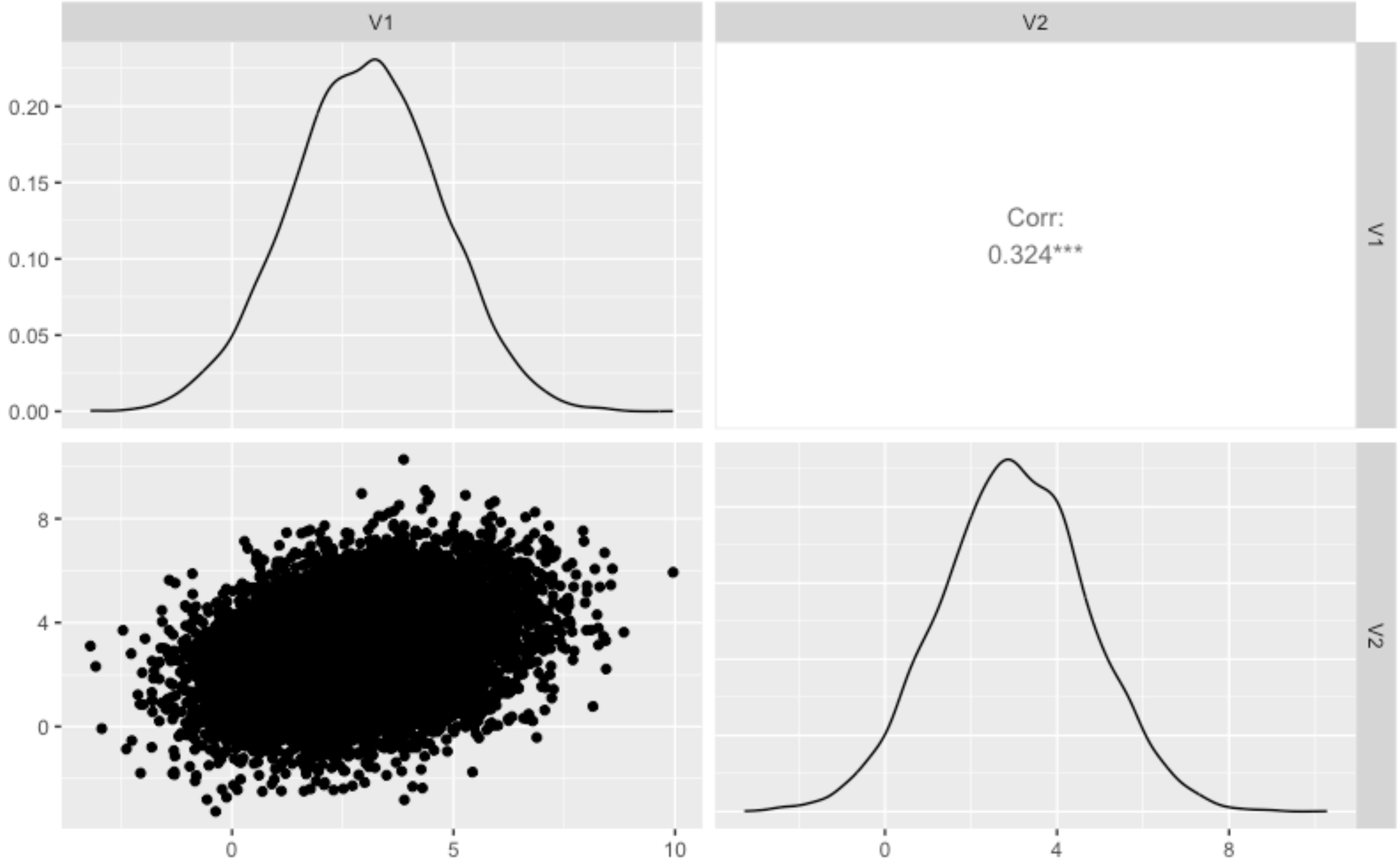
Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ con $\Sigma > 0$ y definamos a $\mathbf{y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mu)$, donde $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ es la matriz raíz cuadrada de Σ^{-1}. Entonces, $y_1, y_2, \ldots, y_p$ son variables aleatorias iid $N(0,1)$.

- En **R** la librería expm proporciona la función requerida para obtener $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ con sqrtm

$$\mathbf{x} \sim N_2(\mu, \Sigma)$$

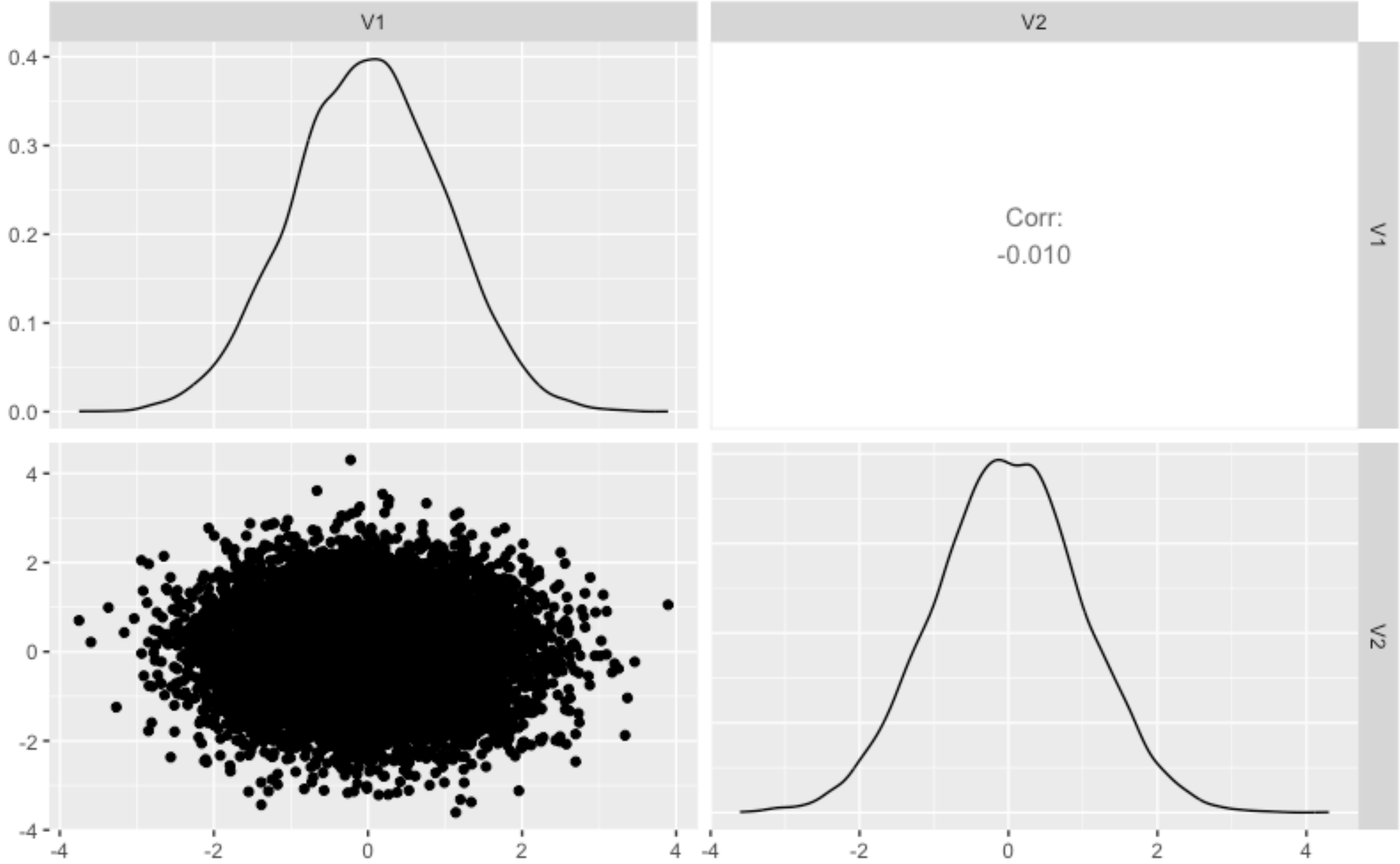
$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$



Distribución normal multivariada

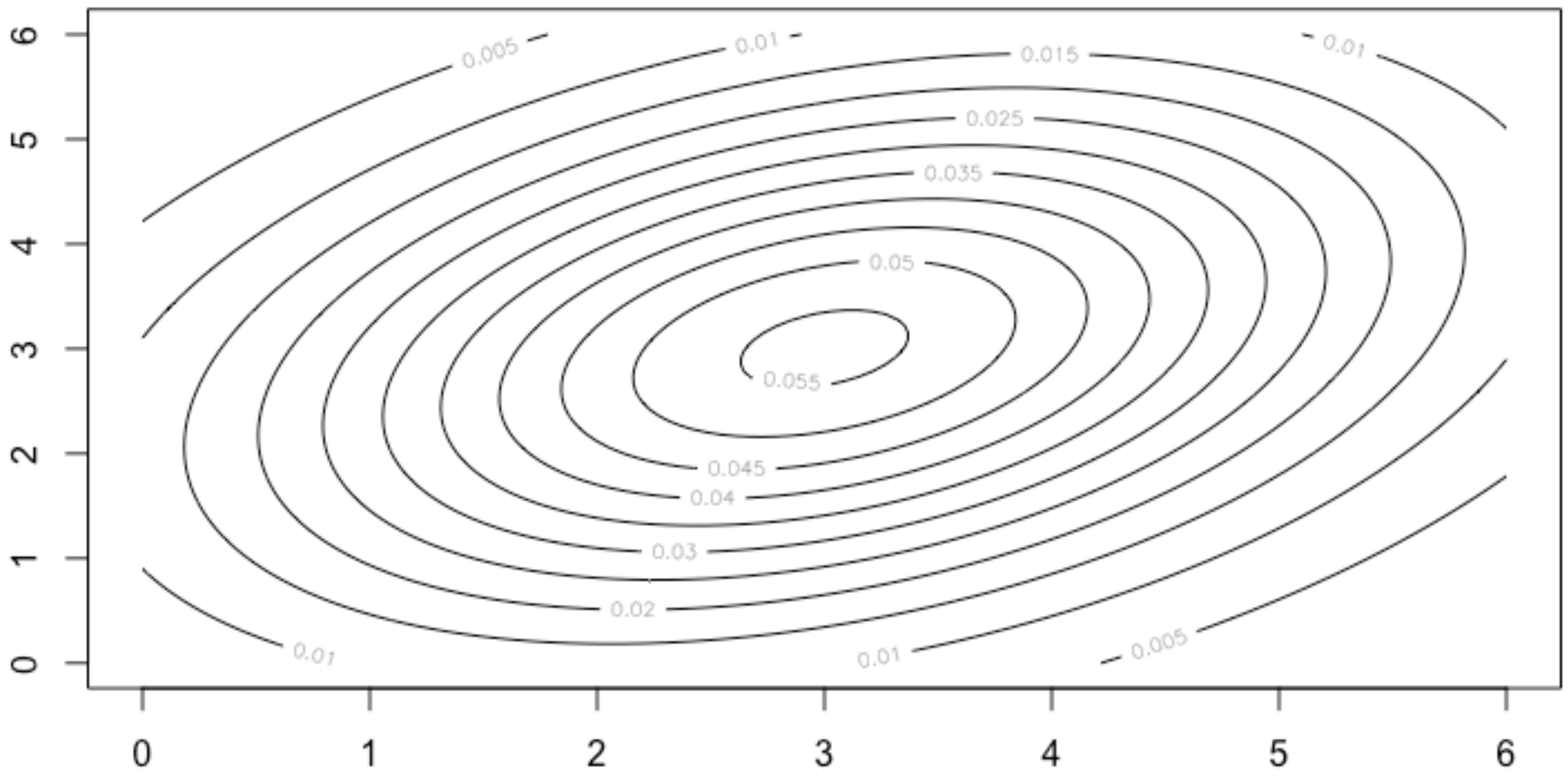
$$\mathbf{y} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \mu)$$



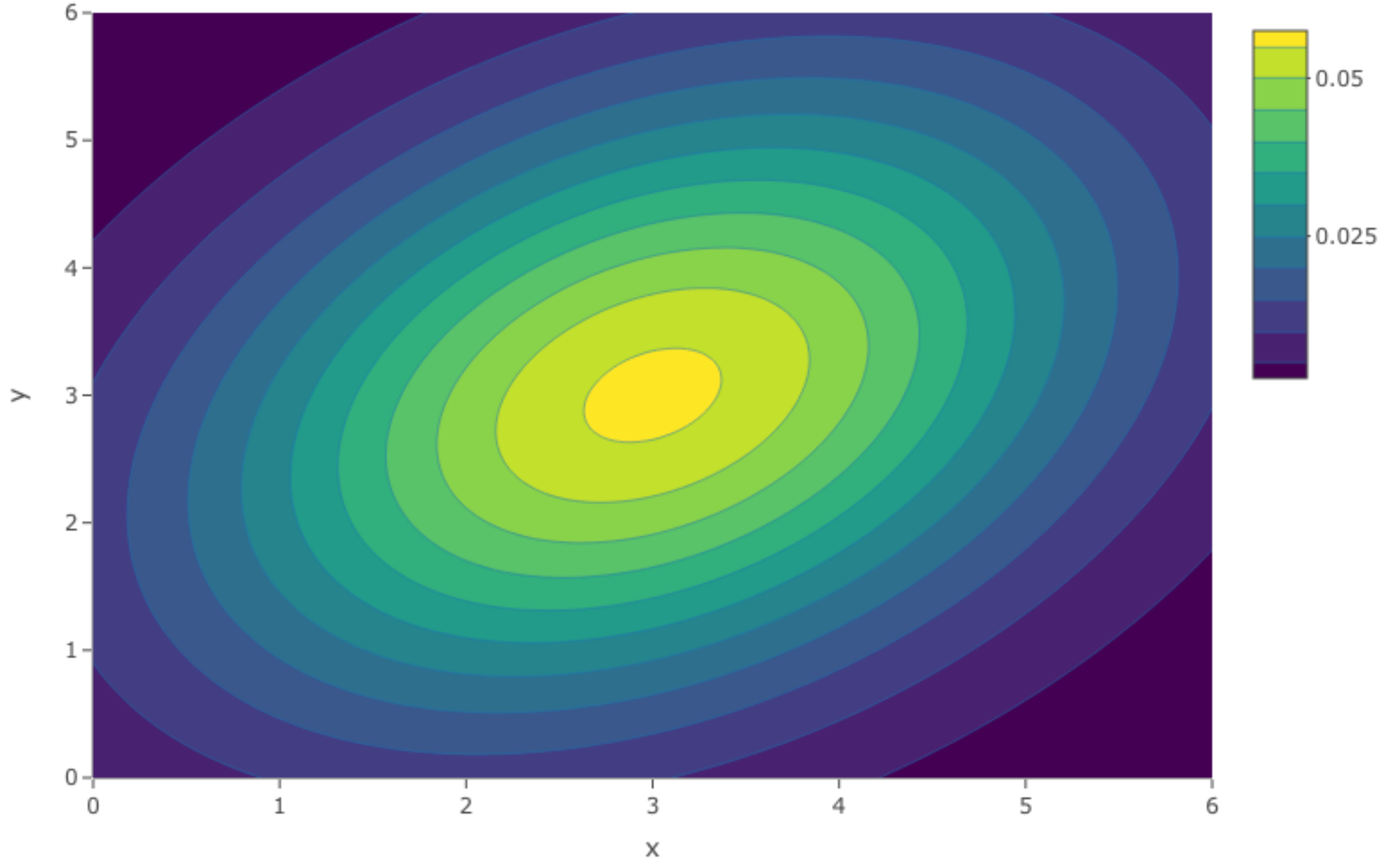
- **Observación**

La distribución normal multivariada tiene densidad constante en elipses (elipsoides)

$$(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)=k$$



- En **R**: la librería plotly para una gráfica más interactiva



- **Proposición**

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ entonces, $U = (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \chi^2_p$.

- **Observación**

Podemos fácilmente evaluar la probabilidad de que $\mathbf{x}$ este en un elipsoide, i.e.

$$\mathbb{P}\left[(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) < k\right]$$

- **Proposición**

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, entonces los coeficientes de asimetría y curtosis están dados respectivamente por,

$$\beta_{1,p} = 0$$
$$\beta_{2,p} = p(p+2)$$

- **Proposición**

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, entonces la función característica de $\mathbf{x}$ está dada por,

$$\phi(\mathbf{t}) = \exp\left(i\mathbf{t}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}\right)$$

- **Proposición**

Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y sea la partición

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{x}^{(1)}$ es de dimensión k y $\mathbf{x}^{(2)}$ es de dimensión $p-k$, entonces,

1. $\mathbf{x}^{(\mathbf{1})} \sim N_k\left(\mu^{(1)}, \Sigma_{11}\right)$
2. $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son independientes si y solo si $\operatorname{Cov}\left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}\right) = \Sigma_{12} = \mathbf{O}$
3. $\mathbf{x}^T\Sigma^{-1}\mathbf{x} \sim \chi^2_p\left(\mu^T\Sigma^{-1}\mu\right)$
4. $\mathbf{x}^{(2)} \,|\, \mathbf{x}^{(1)} \sim N_{p-k}\left(\mu^{(2)} + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}[\mathbf{x}^{(1)} - \mu^{(1)}], \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)$

- **Checar normalidad**

  - Todas las distribuciones univariadas son normales
    - qqplot
    - histogramas
    - Pruebas de normalidad (e.g. Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Lilliefors, etc.)

  - $(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \chi^2_p$
    - qqplot

  - Prueba de Mardia (1970) basada en los coeficientes de asimetría y curtosis multivariados

  - Otras pruebas (e.g. Henze-Zirkler (1990), Royston (1982))

  - En **R:** librería MVN

- **Teorema Central del Límite**

Sean $\mathbf{x}_n = (x_{n1}, \ldots, x_{np})$ una colección de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, con vector de medias μ y matriz (finita) de covarianza Σ. Entonces,

$$\sqrt{n}\,(\bar{\mathbf{x}} - \mu) \to N_p\left(\mathbf{0}_p, \Sigma\right)$$

- **Teorema de Cramér-Wold**

Para $\mathbf{x}_n = (x_{n1}, \ldots, x_{np})$ y $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ dos vectores aleatorios y $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$, entonces

$$\mathbf{x}_n \xrightarrow{d} \mathbf{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{p} t_i x_{ni} \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{p} t_i x_i$$

Distribución Wishart

- **Definición**

Sea $\mathbf{M}_{p\times p}$ una matriz simétrica de variables aleatorias, tal que $\mathbb{P}(\mathbf{M} > 0) = 1$, y sea $\Sigma_{p\times p}$ una matriz definida positiva. Si $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq p$, entonces $\mathbf{M}_{p\times p}$ tiene una distribución Wishart, $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, no singular con n grados de libertad si la función de densidad de los $\frac{p(p+1)}{2}$ distintos elementos de $\mathbf{M}_{p\times p}$ está dada por:

$$f(m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{pp}) = c^{-1}\,|\,\mathbf{M}\,|^{(n-p-1)/2}\,\mathrm{etr}\left(-\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{M}}{2}\right)$$

- Donde
  - etr es el operador $\exp^{\text{trace}}$
  - $c = 2^{\frac{np}{2}}\,|\,\Sigma\,|^{\frac{n}{2}}\,\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)$ y $\Gamma_p(\,\cdot\,)$ la función gamma multivariada

- **Definición**

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vectores aleatorios iid distribuidos como $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ entonces $\mathbf{M}_{p\times p} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ tiene una distribución Wishart con n grados de libertad

- **Observación**

Si $\Sigma > 0$ y $n \geq p$, entonces se puede probar que $\mathbb{P}(\mathbf{M} > 0) = 1$. De lo contrario, se tiene que $\mathbf{M} \geq 0$, por lo que la densidad no existe y se dice que $\mathbf{M}$ tiene una distribución singular

- **Teorema**

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces, si $\mathbf{C}_{q \times p}$ tal que $\text{ran}(\mathbf{C}) = q$, se tiene que $\mathbf{CMC^T} \sim W_q\left(n, \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^T\right)$

- **Corolario**

Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ y $\mathbf{a}$ es un vector de constantes, entonces $\mathbf{a^T M a} \sim \sigma_{\mathbf{a}}^2 \cdot \chi_n^2$, donde $\sigma_{\mathbf{a}}^2 = \mathbf{a^T}\Sigma\mathbf{a}$

- **Corolario**

Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces $m_{ii} \sim \Sigma_{ii} \cdot \chi_n^2$

- **Proposición**

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ entonces:

1. $\mathbb{E}(\mathbf{M}) = n\Sigma$
2. (Aditividad) Si $\mathbf{M}_i \sim W_p(n_i, \Sigma)$ independientes entonces, $\sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}_i \sim W_p\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, \Sigma\right)$
3. Si partimos a $\mathbf{M}$ y a Σ como,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

entonces, $\mathbf{M}_{11} \sim W_k(n, \Sigma_{11})$ y $\mathbf{M}_{22} \sim W_{p-k}(n, \Sigma_{22})$. Más aún si $\Sigma_{12} = 0$, entonces $\mathbf{M}_{11}$ y $\mathbf{M}_{22}$ son independientes.

- **Teorema (Formas cuadráticas)**

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$, entonces

1. Sea $\mathbf{A}_{q\times p}$ una matriz tal que $\operatorname{ran}(\mathbf{A}) = q$, entonces $\left(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)^{-1} \sim W_q\left(n-p+q, \left(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}^{T}\right)^{-1}\right)$

2. Sea $\mathbf{y}_{p\times 1}$ independiente de $\mathbf{M}$ y tal que $\mathbb{P}(\mathbf{y} = \mathbf{0}) = 0$, entonces $\dfrac{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y}} \sim \chi^2_n$ y $\dfrac{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}} \sim \chi^2_{n-p+1}$

3. Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vectores aleatorios iid $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$. Entonces si consideramos a $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a}$ con $\mathbf{a}_{p\times 1}$, $\mathbf{A}_{n\times n}$, $\mathbf{B}_{n\times n}$ matrices simétricas de rango r, s respectivamente y $\mathbf{b}_{n\times 1}$ un vector de constantes entonces

   - $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ si y solo si $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$
   - $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ y $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\mathbf{X} \sim W_p(s, \Sigma)$ son independientes si y solo si $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$ y $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$ son independientes
   - $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \sim N_p$ y $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ son independientes si y solo si $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \sim N_1$ y $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} \sim \sigma_a^2 \cdot \chi_r^2$ son independientes

- **Lema**

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_1 \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ (iid) entonces se cumple lo siguiente

1. $\mathbf{x}^{(j)} \sim N_n\left(\mathbf{0}, \sigma_{jj}\mathbf{I}\right)$

2. Si $\mathbf{a}_{n\times 1}$ es un vector de constantes entonces $\mathbf{X}^T\mathbf{a} \sim N_p\left(\mathbf{0}, ||\mathbf{a}||^2\Sigma\right)$

3. Si $\left\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\right\}$, $r \leq n$, es un conjunto de vectores mutuamente ortogonal entonces, los vectores aleatorios dados por $\mathbf{X}^T\mathbf{a_i}$ son mutuamente independientes

4. Si $\mathbf{b}_{p\times 1}$ es un vector de constantes, entonces $\mathbf{Xb} \sim N_n\left(\mathbf{0}, \sigma_b^2\mathbf{I}\right)$ donde $\sigma_b^2 = \mathbf{b}^T\Sigma\mathbf{b}$

- **Lema**

Sea $\mathbf{x} \sim N_p\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}\right)$ y $\mathbf{A}_{p\times q}$ una matriz simétrica entonces $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \sim \sigma^2 \cdot \chi_r^2$ si y solo si $\mathbf{A}$ es idempotente y con $\mathrm{ran}(\mathbf{A}) = r$

- **Lema**

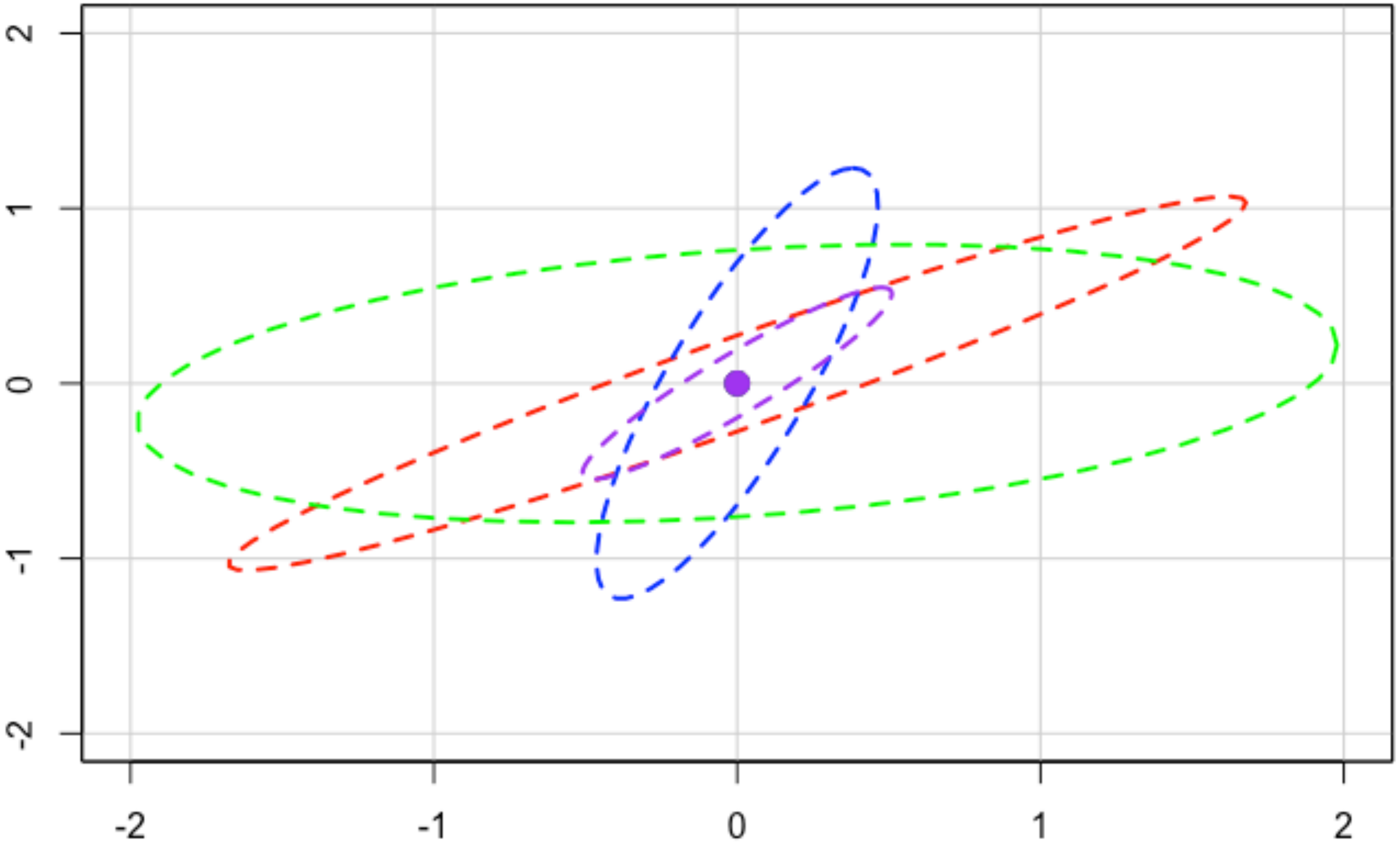
Sea $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$ y sean $\mathbf{Q}_i = \mathbf{x}^T\mathbf{P}_\mathbf{i}\mathbf{x} \sim \sigma^2 \cdot \chi_{r_i}^2$ $(i = 1,2)$ dos formas cuadráticas,. Entonces $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ son independientes si y solo si $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{O}$

- En **R:** rWishart
- Para entender su aleatoriedad podemos graficar las elipses generadas: $\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}_{\mathbf{i}}\mathbf{a} = c$

$$i = 1,2,3,4$$

$$\mathrm{df} = 2$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- **Definición (Distribución Wishart no centrada)**

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vectores aleatorios independientes y distribuidos como $N_p(\mu_{\mathbf{i}}, \Sigma)$, entonces $\mathbf{M}_{p\times p} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ tiene una distribución Wishart no centrada, $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma, \Delta)$, con n grados de libertad y matriz de no centralidad Δ definida como

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu_i)(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu_i)^T = \Sigma^{-\frac{1}{2}}\Lambda^T\Lambda\Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

donde

$$\Lambda = \left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right)^T$$

Distribución T^2 de Hotelling

- **Teorema (Distribución centrada)**

Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes y no singulares, entonces,

$$T^2 = n(\mathbf{x} - \mu)^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \mu) \sim \left(\frac{np}{n - p + 1}\right) F_{p,n-p+1} = T^2_{p,n}$$

- **Corolario**

Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \lambda^{-1}\Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes y no singulares, entonces,

$$\lambda \left(\mathbf{x} - \mu\right)^T \left(\frac{M}{n}\right)^{-1} \left(\mathbf{x} - \mu\right) \sim T^2_{n,p}$$

- **Teorema (Distribución no centrada)**

Sean $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes y no singulares, y denotemos por $\delta = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$ (parámetro de no centralidad), entonces,

$$T^2 = n\mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} \sim \left(\frac{np}{n-p+1} \right) F_{p,n-p+1,\delta} = T^2_{p,n,\delta}$$

Estimación para la distribución normal multivariada

- **Función de verosimilitud**

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$, entonces la verosimilitud está dada por,

$$L(\mu, \Sigma) = |2\pi\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}_i - \mu)\right]$$

y la log-verosimilitud

$$\log(L(\mu, \Sigma)) = -\frac{n}{2}\log(|2\pi\Sigma|) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}_i - \mu)$$

- **Proposición**

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$, con $n \geq p + 1$, entonces los estimadores máximo verosímiles están dados por

$$\hat{\mu} = \bar{x} \qquad \hat{\Sigma} = \frac{(n-1)}{n}\mathbf{S}$$

- **Teorema**

Sean $\bar{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{S}$ la media y matriz de varianzas muestrales de una distribución normal multivariada $N_p(\mu, \Sigma)$ con $(n-1) \geq p$ entonces,

- $\bar{\mathbf{x}} \sim N_p(\mu, n^{-1}\Sigma)$

- $(n-1)\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \Sigma)$

- $\bar{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{S}$ son independientes

- $n(\bar{\mathbf{x}} - \mu)^T \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu) \sim T^2(p, n-1)$

Prueba de hipótesis para μ

Prueba para μ con Σ conocida

- Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$ queremos hacer el siguiente contraste

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad vs \qquad H_a : \mu \neq \mu_0$$

- Usamos el estadístico de prueba

$$\xi^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)$$

- Bajo H_0 se tiene que $\xi^2 \sim \chi^2_p$

- Región de confianza $100(1-\alpha)\,\%$ son las elipsoides

$$\left\{ \mathbf{x} : \xi^2 \leq \chi^2_{p,1-\alpha} \right\}$$

- Ejemplo

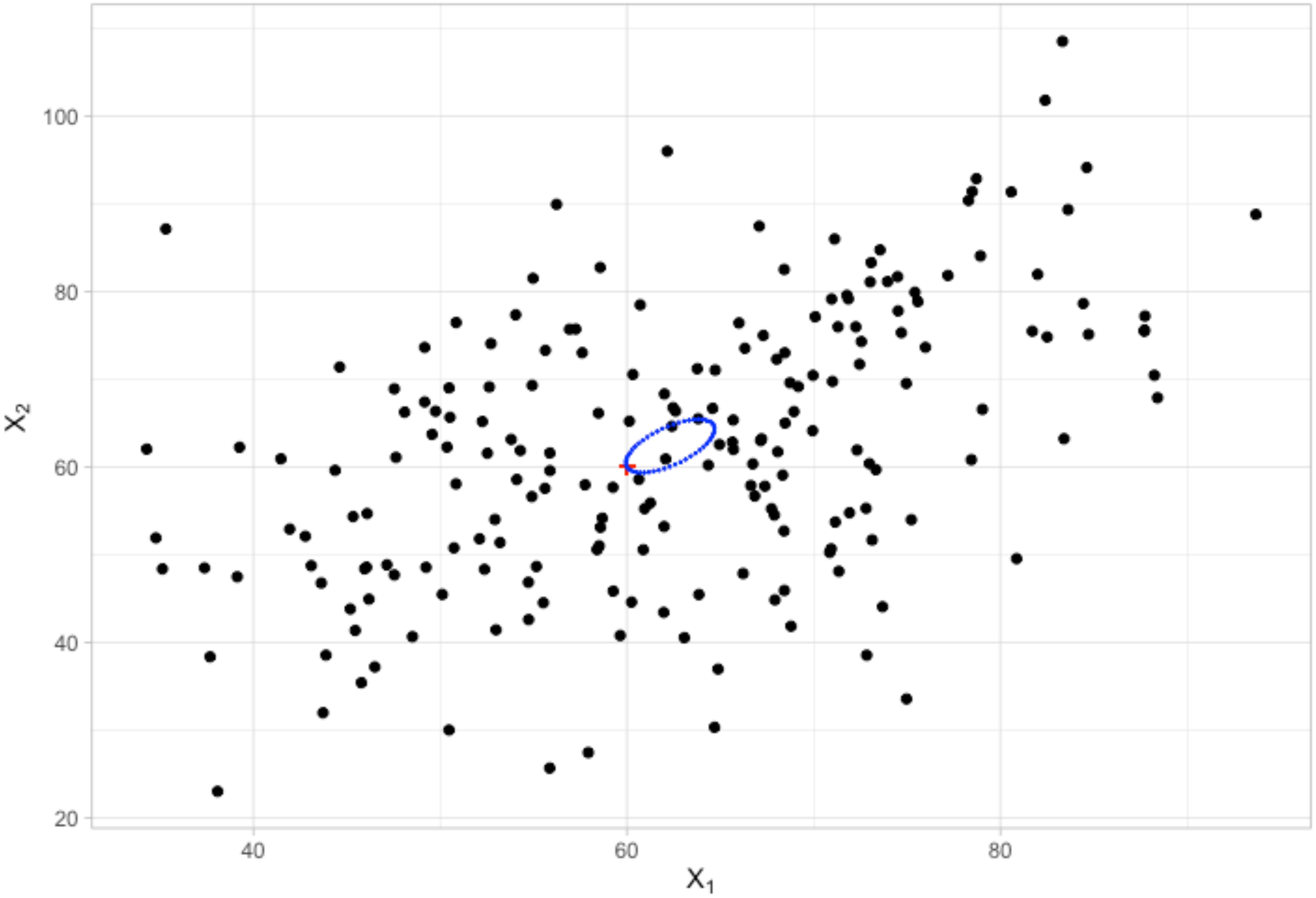
Dados $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{203} \sim N_2(\mu, \Sigma)$ (iid) con

$$\mu = \begin{pmatrix} 64.1 \\ 64.7 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 191 & 155.6 \\ 155.6 & 313.5 \end{pmatrix}.$$

Se busca contrastar,

$$H_0 : \mu = 60 \qquad vs \qquad H_a : \mu \neq 60$$

Prueba para μ con Σ conocida



$$\xi^2 = 5.971581 < 5.991465 = \chi^2_{2,.95}$$

No rechazamos H_0

Prueba para μ con Σ desconocida

- Para una muestra, utilizamos $\mathbf{S}$ para construir el estadístico de prueba

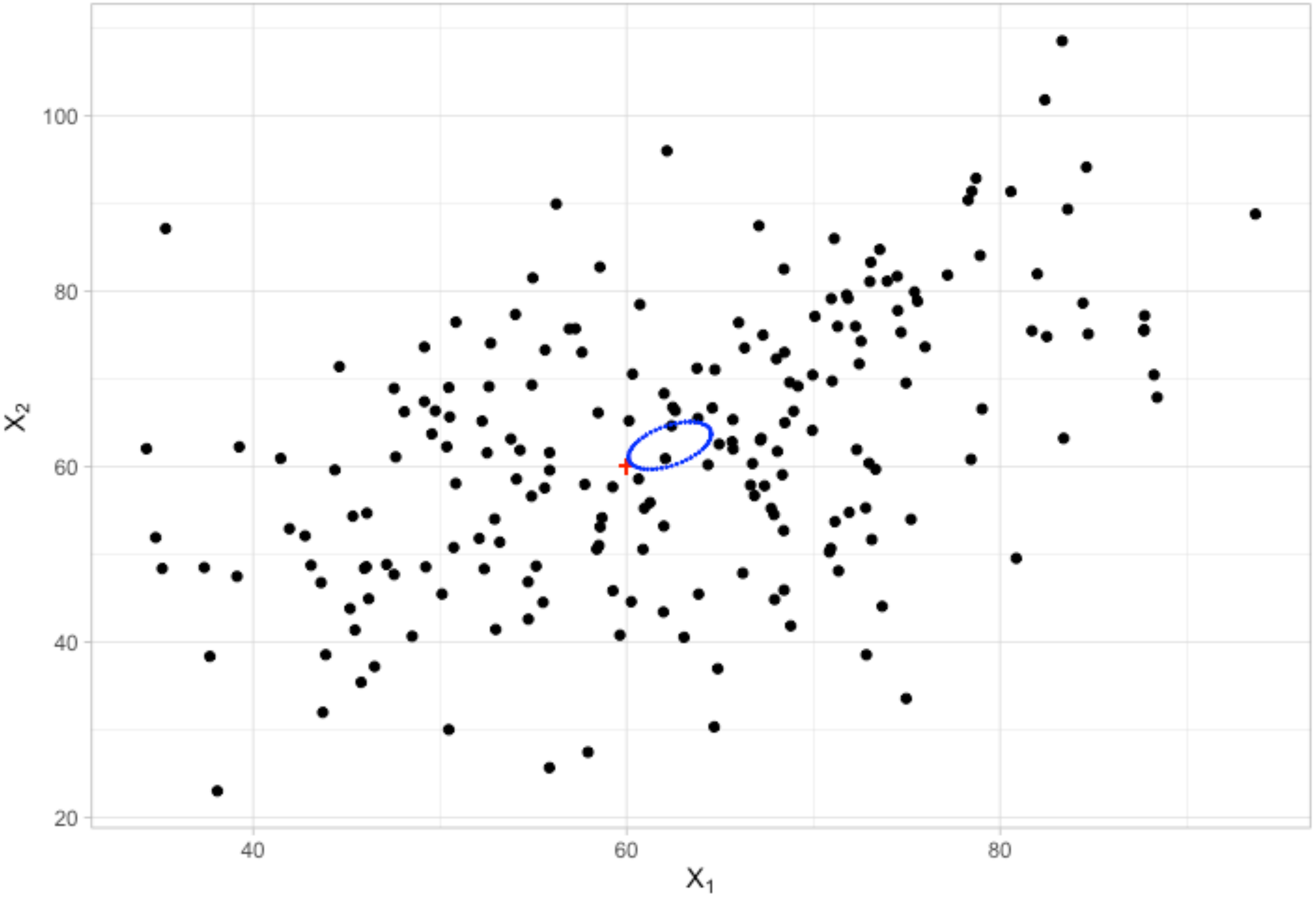
$$\gamma^2 = \frac{n(n-p)}{(n-1)p}(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)$$

- Bajo H_0 se tiene $\gamma^2 \sim F_{p,n-p}$

- Región de confianza $100(1-\alpha)\,\%$ son las elipsoides

$$\left\{ \mathbf{x} : \gamma^2 \leq F_{p,n-p,1-\alpha} \right\}$$

Prueba para μ con Σ desconocida



$$\gamma^2 = 3.870381 > 3.013826 = F_{2,201,.95}$$

Rechazamos H_0

Pruebas de hipótesis para Σ

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$ con $n \geq p + 1$ se pueden hacer las siguiente pruebas para Σ

- Independencia por bloques, $H_0 : \Sigma_{rs} = \mathbf{0}$

- Esfericidad
  - Caso 1 : $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ con σ^2 desconocida (esta prueba incluye a $\Sigma = \sigma^2 \Sigma_0$)
  - Caso 2: $\Sigma = \mathbf{I}$ (esta prueba incluye a $\Sigma = \Sigma_0$)

- Igualdad en los bloques diagonales, i.e., $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \cdots = \Sigma_{qq}$
- Igualdad de varianzas y correlaciones

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Pruebas de hipótesis para dos poblaciones

Prueba de igualdad de covarianzas

- Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu_1, \Sigma_1)$ y $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu_2, \Sigma_2)$

- A través del cociente de verosimilitudes se obtiene el estadístico de prueba

$$\mathscr{L} = \frac{(n+m)^{\frac{(n+m)p}{2}}}{n^{\frac{np}{2}} m^{\frac{mp}{2}}} \frac{|\mathbf{Q}_1|^{\frac{n}{2}} |\mathbf{Q}_2|^{\frac{m}{2}}}{|\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2|^{\frac{n+m}{2}}}$$

- (Wilks, 1931) Asintóticamente se tiene que si H_o es cierta entonces

$$-2\log(\mathscr{L}) \sim \chi^2_\nu, \qquad \nu = \frac{p(p+1)}{2}$$

- **Caso 1**: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ conocida y con muestras independientes

  - $\bar{\mathbf{x}} \sim N\left(\mu_1, n^{-1}\Sigma\right)$ es independiente de $\mathbf{Q}_1 = (n-1)\mathbf{S_1} \sim W_p(n-1,\Sigma)$
  - $\bar{\mathbf{y}} \sim N\left(\mu_2, m^{-1}\Sigma\right)$ es independiente de $\mathbf{Q}_2 = (m-1)\mathbf{S_2} \sim W_p(m-1,\Sigma)$
  - $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{Q_1}, \mathbf{Q_2},$ son independientes

Así,

$$\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} \sim N_p\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\Sigma\right) \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} \sim W_p\,(n+m-2,\Sigma)$$

El estadístico de prueba es

$$\frac{nm(n+m-2)}{n+m}\left(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} - (\mu_1 - \mu_2)\right)^T \mathbf{Q}\left(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} - (\mu_1 - \mu_2)\right) \sim T^2_{p,n+m-2}$$

- **Caso 2**: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ desconocida y muestras independientes

- **Proposición**

Sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu_1, \Sigma_1)$ y $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mu_2, \Sigma_2)$ si $\mu_1 = \mu_2$ y $\Sigma_1 = \Sigma_2$ entonces,

$$\frac{nm}{n+m}(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}_u^{-1} (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}) \sim T^2(p, n+m-2)$$

donde

$$\mathbf{S}_u = \frac{n\mathbf{S}_1 + m\mathbf{S}_2}{n+m-2}$$

- Usamos el estadístico

$$\delta^2 = \frac{(n+m-p-1)nm}{(n+m-2)(n+m)}(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}_u^{-1} (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}) \sim F_{p,n+m-p-1}$$

- **Caso 3**: $m = n$ y $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ se reduce a considerar

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i \sim N_p\left(\mu, \Sigma\right)$$

donde

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 \qquad \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

- Se hace el contraste de hipótesis para una población

$$H_0 : \mu = 0 \qquad vs \qquad H_a : \mu \neq 0$$

- **Caso 4**: $m \neq n$ y $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ (problema de Behrens-Fisher)

  - Se considera el estadístico

$$\mathcal{T} = (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \left(\frac{\mathbf{S}_1}{n} + \frac{\mathbf{S}_2}{m} \right) (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})$$

  - Bajo H_0 y para n y m suficientemente grandes

$$\mathcal{T} \sim \chi^2_p$$