

Simulación Estocástica

Tarea 2

Fecha de entrega: 7 de septiembre

1. Implementa el generador de números aleatorios (PRNG) propuesto por Wichmann & Hill en 1982, el cual se define como:

$$\begin{aligned}X_{n+1} &= 171X_n \pmod{30269} \\Y_{n+1} &= 172Y_n \pmod{30307} \\Z_{n+1} &= 170Z_n \pmod{30323}.\end{aligned}$$

y así, definimos un valor en el intervalo unitario como:

$$U_{n+1} = \left(\frac{X_{n+1}}{30269} + \frac{Y_{n+1}}{30307} + \frac{Z_{n+1}}{30323} \right) \pmod{1}.$$

- (a) Elige semillas iniciales X_0, Y_0, Z_0 mayores a cero y menores a 30269, 30307 y 30323 respectivamente y genera una muestra de tamaño 10,000.
 - (b) Con base en las herramientas gráficas y pruebas estadísticas estudiadas en el curso, evalúa si existe evidencia de desviaciones importantes de uniformidad o independencia en la secuencia generada.
2. Considera la distribución Cauchy estándar cuya densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

- (a) Encuentra la función de distribución y su inversa.
- (b) Diseña un algoritmo para simular variables aleatorias Cauchy estándar e impleméntalo.
- (c) Genera 100 muestras de tamaños 100, 1000, 10000 y 100000 y analiza el comportamiento de $\bar{x}$. Explica el comportamiento observado a partir de las propiedades de la distribución Cauchy.

3. Supongamos que se desea simular de una variable aleatoria Poisson de parámetro λ .

- (a) Diseña e implementa un algoritmo utilizando la función inversa generalizada y evaluando de forma exacta la función de masa, esto es,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}.$$

- (b) Genera una segunda versión del algoritmo utilizando la propiedad recursiva de la función masa.
- (c) Diseña e implementa el algoritmo a partir del proceso Poisson visto en clase.
- (d) Verifica mediante herramientas gráficas y estadísticas apropiadas que los algoritmos producen muestras compatibles con una distribución $\text{Poisson}(\lambda)$.
- (e) Compara el tiempo de ejecución de los tres algoritmos para generar muestras de tamaños $n = 100, 1000, 10000, 100000$ y para $\lambda = 1, 10, 50$. ¿Cuál resulta más eficiente en cada caso? Discute los resultados considerando tanto el tiempo de cómputo como las operaciones requeridas por cada algoritmo.